第五章 控制系统的频域分析

学习要求

基本内容：

频率特性：频域响应、频率特性的概念，频率特性的两种主要描述方式—幅相频率特性图（**Nyquist** 图）和对数频率特性图（**Bode** 图）。

典型环节的频率特性（包括典型环节的 **Nyquist** 图和 **Bode** 图）。

系统开环频率特性： **Nyquist** 图和 **Bode** 图的绘制，最小相位系统的概念，利用实测开环幅频特性确定最小相位系统的开环传递函数。

学习要求

线性系统稳定性的 **Nyquist** 稳定判据（几何判据）：包括利用幅相频率特性曲线和对数频率特性曲线进行判断。

控制系统的相对稳定性：相角裕度、幅值裕度的概念及计算。

闭环频率特性及频域性能指标：闭环频率特性，频域性能指标。

频域指标与时域指标的关系。

教学要求

掌握频率特性的基本概念，幅相频率特性图与对数频率特性图的建立。

熟悉典型环节的频率特性及其 Nyquist 图与 Bode 图；掌握系统开环频率特性（ Nyquist 图和 Bode 图）的绘制。

了解最小相位系统的概念；重点掌握利用实测开环幅频特性确定最小相位系统的开环传递函数的方法。

重点掌握判断系统稳定性的几何判据：乃奎斯特稳定判据（包括利用幅相频率特性曲线和对数频率特性曲线进行判断）。

熟悉控制系统相角裕度、幅值裕度的基本定义和概念及计算方法。

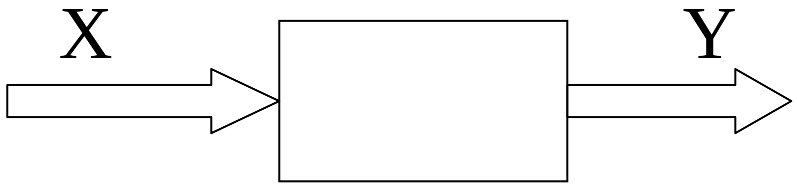
一般了解闭环幅频特性（等 M 圆）的求解方法，掌握频域性能指标及频域指标与时域指标的关系。

第一节 引言

频率特性是指一个系统对不同频率的正弦波输入时的响应特性。系统的频率特性与其性能有密切关系。通过研究频率特性可掌握系统性能。用研究频率特性的方法研究控制系统称为控制系统的频域分析方法。它是经典控制理论的一个重要组成部分。频率特性的方法对一切工程上的系统都适用，如光学，电子，机械等系统。

第二节　频率特性的基本概念

对线性定常系统



$X(t) = A\sin\omega t$　　$Y(t) = B\sin(\omega t + \theta)$

其系统频率特性函数 $G(j\omega) = \dfrac{\text{稳态输出}Y（\omega）}{\text{正弦输入}X（\omega）}$

1. 极坐标形式： $G(jw) = M(w)e^{j\theta(w)}$

幅频特性：　$M(\omega) = \left|G(j\omega)\right|$

相频特性：　$\theta(\omega) = \angle G(j\omega)$

2.直角坐标形式： $G(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$

3. 两种形式间的转换：

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$$

$$\theta(\omega) = tg^{-1}\frac{I(\omega)}{R(\omega)}$$

$$R(\omega) = M(\omega)\cos\theta(\omega)$$

$$I(\omega) = M(\omega)\sin\theta(\omega)$$

4. 求取频率特性函数：

① $G(s)\big|_{s=j\omega} = G(j\omega)$

② 据频率特性函数 $G(j\omega) = \dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}$

例5-1 求一惯性环节的频率特性。 设这个惯性环节为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{k}{Ts+1}$$

解： 令$s=j\omega$,代入$G(s)$有

$$G(j\omega)=\frac{k}{j\omega T+1}=\frac{k}{\sqrt{(\omega T)^2+1}}e^{-jtg^{-1}\omega T}$$

若换一种方式，设输入$x(t)=A\sin\omega t$，则用拉氏反变换可求出输出y(t)为

$$Y(t)=L^{-1}[G(s)X(s)]=L^{-1}\left[\frac{k}{Ts+1}\cdot\frac{Aw}{s^2+w^2}\right]$$

$$= L^{-1}\left\{kA\left[\frac{T^2\omega}{1+T^2\omega^2}\cdot\frac{1}{Ts+1}+\frac{\omega}{1+T^2\omega^2}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}-\frac{Ts}{s^2+\omega^2}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{kAT\omega}{1+T^2\omega^2}e^{-\frac{t}{T}}+\frac{kA}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega t+\theta)$$

$$\left(\theta = -tg^{-1}\omega T\right)$$

，输出y(t)中的第一项（系统的瞬

在稳态时（即t$\longrightarrow\infty$）

态响应）将等于零。所以有

$$\bar{y} = \frac{kA}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}\sin(\omega t+\theta) = \frac{kA}{\sqrt{(T\omega)^2+1}}e^{j(\omega t+\theta)}$$

将输入$x(t)$也用复数的指数形式表示

$$y(t \to \infty) = \frac{kA}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}} \sin(\omega t + \theta) \Rightarrow Y(\omega) = \frac{kAe^{j\theta}}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}}$$

$$x(t) = A\sin \omega t \Rightarrow X(\omega) = Ae^{j0}$$

$$\therefore G(j\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{K}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}} e^{j\theta}$$

第三节　频率特性的极坐标图

一. 基本概念

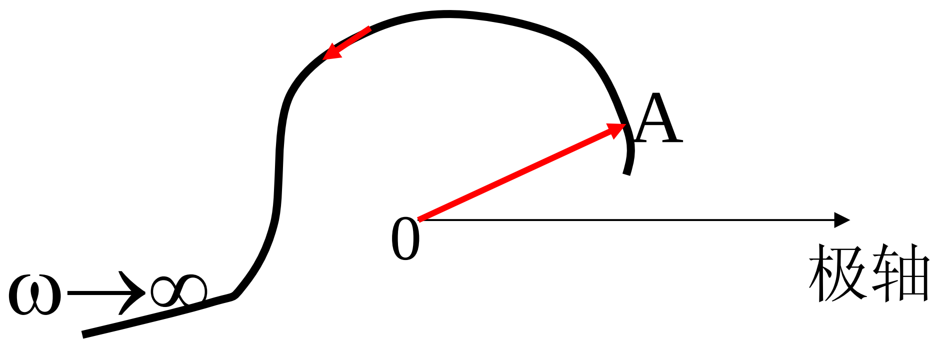
频率特性分析法—图解法—方便迅速求出近似解

两种图示法：极坐标图示法和对数极坐标图示法。

$G(j\omega)=|G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega_1)}$　　当 $\omega:0\to\infty$时，

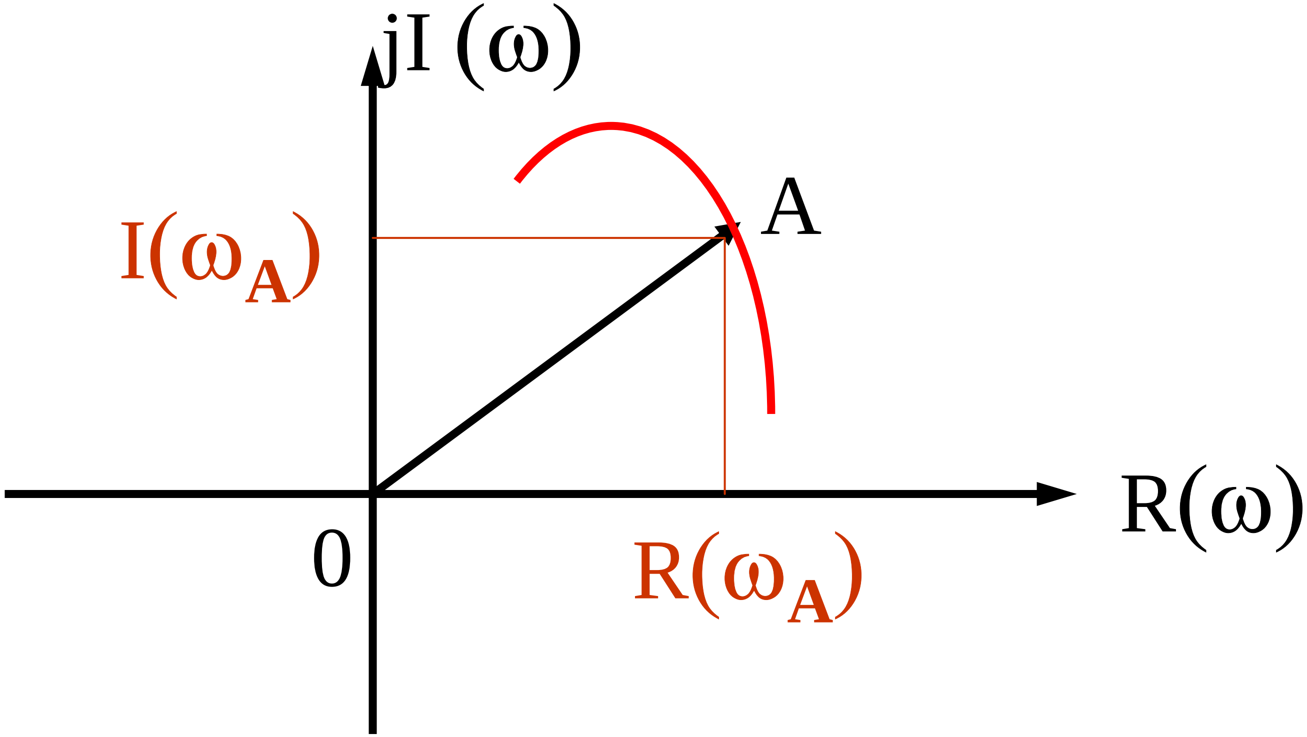
$\overrightarrow{OA}$ 端点A形成轨迹曲线，称为G(jω)的极坐标图（幅相特性曲线）。

极坐标图



若用直角坐标表示：

$$G(j\omega)=R(\omega)+jI(\omega)$$

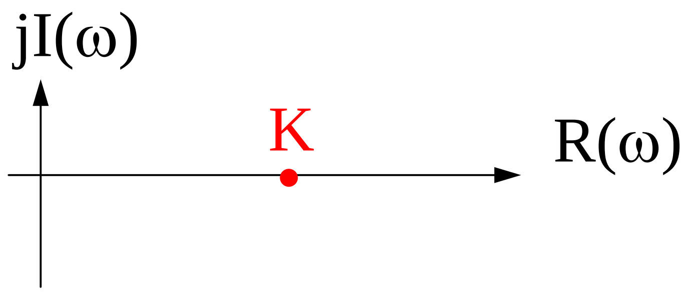


在直角坐标上表示的曲线也称为极坐标图

二. 典型环节频率特性的极坐标图

1. 比例环节 $G(s)=K$

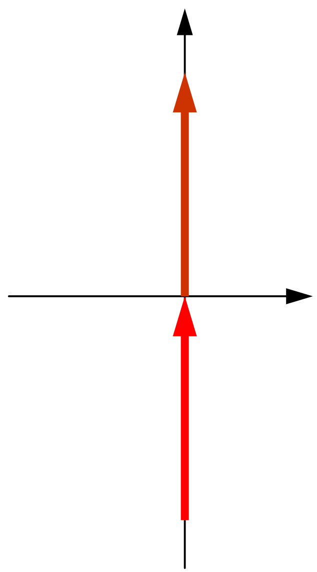
$$G(j\omega)=K+j0=Ke^{j0}$$



2. 积分环节 $G(s)=\dfrac{1}{s}$

$$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}=\frac{1}{\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

相位滞后90° $\omega\uparrow\Rightarrow$ 模减小



3. 微分环节 $G(s)=s$

$$G(j\omega)=j\omega=\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$$

相位超前 90° $\omega\uparrow\Rightarrow$ 模增大

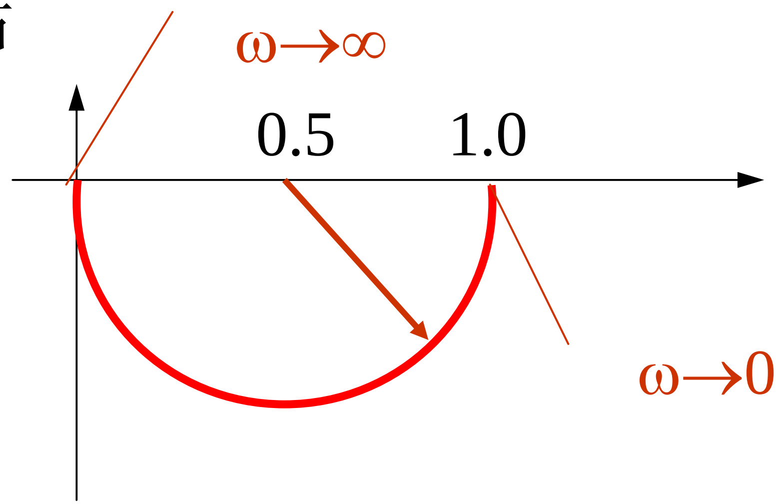
4. 惯性环节：$G(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+jT\omega}=\frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2+1}}e^{-jarctg\omega T}$$

ω: $0\rightarrow\infty$　　$M(\omega)$: $1\rightarrow 0$　低通滤波器

$\phi(\omega)$: $0\rightarrow -90^{\circ}$ 相位滞后

曲线为一个半圆



$$R(\omega)=\frac{1}{(\omega T)^2+1}$$

$$I(\omega)=\frac{\omega T}{(\omega T)^2+1}$$

$$\big(R(\omega)-0.5\big)^2+I^2(\omega)=0.5^2$$　圆方程

5. 二阶振荡环节：$G(s)=\dfrac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$　　$0<\zeta<1$

$$G(j\omega)=\frac{1}{T^2(j\omega)^2+2\zeta Tj\omega+1}$$

$$=\frac{1-T^2\omega^2}{(1-T^2\omega^2)^2+(2\zeta T\omega)^2}-\frac{2\zeta T\omega}{(1-T^2\omega^2)^2+(2\zeta T\omega)^2}j$$

$$M(\omega)=\frac{1}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\zeta T\omega)^2}}$$

$$\phi(\omega)=-tg^{-1}\frac{2\zeta T\omega}{1-T^2\omega^2}$$

ω: $0 \to \infty$

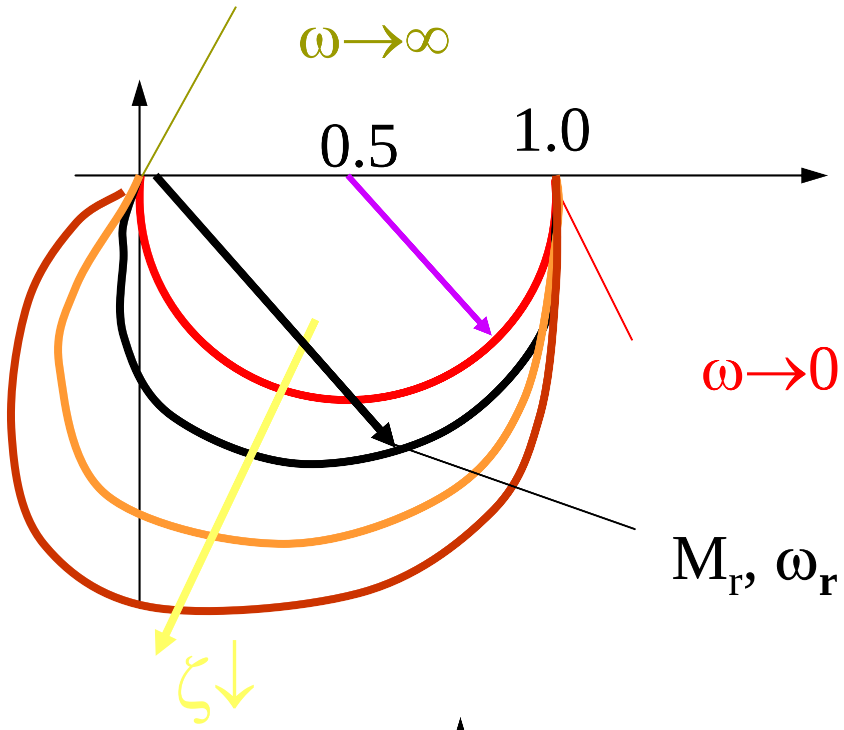
$M(\omega)$: $1 \to 0$

$\phi(\omega)$: $0 \to 180$

$\zeta \downarrow \to M(\omega) \uparrow$

$0 < \zeta < 1$ 有 M_r, ω_r

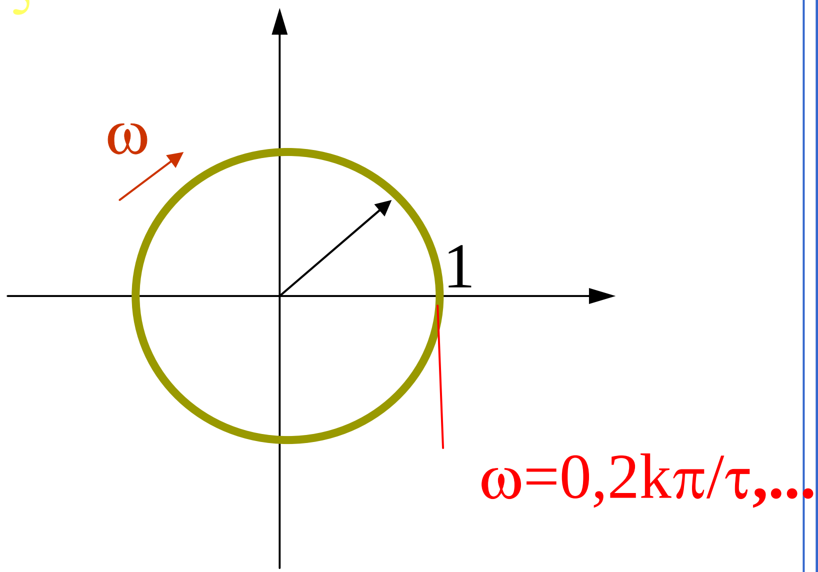
$\zeta \geq 1$ 半圆曲线



6. 迟延环节：$G(s) = e^{-\tau s}$

$$G(j\omega) = e^{-j\pi\omega}$$

$$M(\omega) = 1 \qquad \phi(\omega) = -\tau\omega$$



三.开环系统频率特性极坐标图(奈氏图)

奈氏图非常有用，它是用开环频率特性分析闭环控制系统性能 (主要是稳定性)。

开环系统频率特性

$$G(s)H(s)\big|_{s=j\omega}=G(j\omega)H(j\omega)$$

开环传函的表示：

$$G(s)H(s) \quad G_{OPEN}(s) \quad G_0(s) \quad G_k(s) \quad G_{开}(s)$$

开环传函的求法：打开闭环求通路之积 $\prod G_i$

奈氏图绘制：取$\omega=0,1,2\cdots$ 逐点计算$M(\omega)$、$\phi(\omega)$或$R(\omega)$、$I(\omega)$，描点绘线成图。

★手工绘制；✸用计算机绘制

例5-2　绘制 $\dfrac{10}{(s+1)(0.1s+1)}$ 频率特性极坐标图

解：

$$G(j\omega)=G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)$$

$$G_1(j\omega)=10$$

$$G_2(j\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}e^{-jarctg\omega}$$

$$G_3(j\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+(0.1\omega)^2}}e^{-jarctg(0.1\omega)}$$

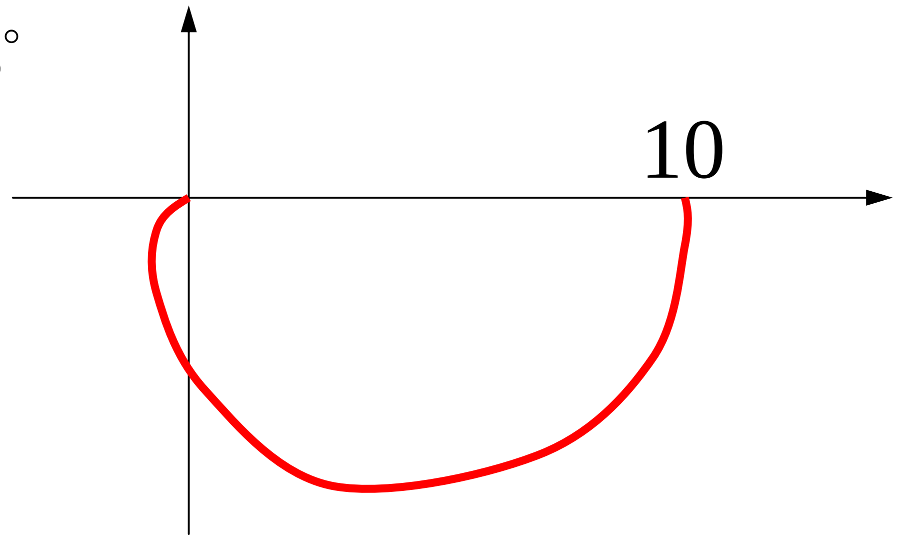
$$M(\omega)=\frac{10}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+(0.1\omega)^2}}$$

$$\phi(\omega)=-tg^{-1}\omega-tg^{-1}(0.1\omega)$$

$$\omega=0,0.5,1,2,\cdots,10$$

$$M=10,8.9,\cdots,0.71$$

$$\phi=0^\circ,29.4^\circ,\cdots,129.3^\circ$$



四.典型系统奈氏图

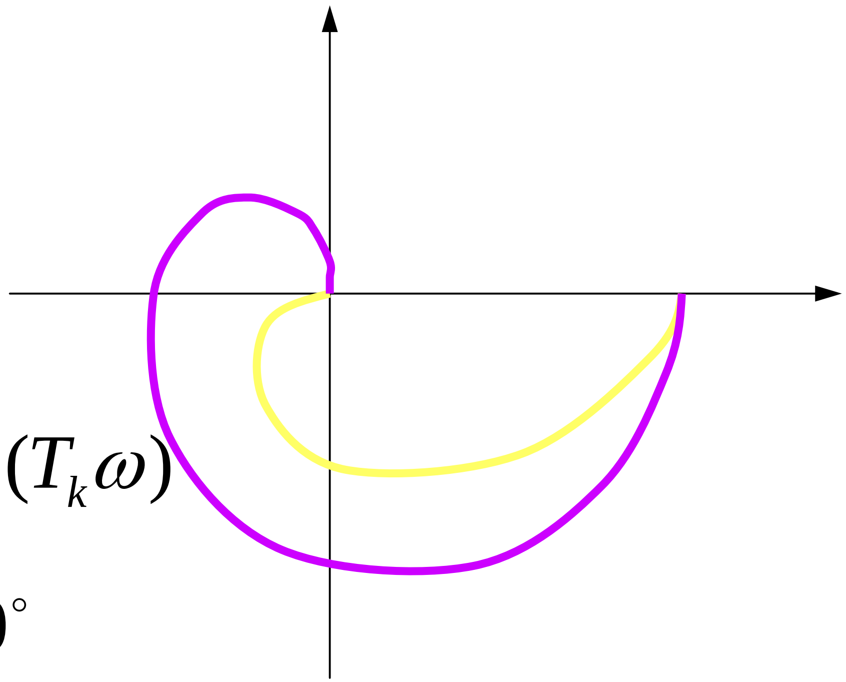
1) 0 型系统的奈氏图

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{\prod_{k=1}^{n}(\tau_k s+1)} \qquad (m<n)$$

其频率特性

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i j\omega+1)}{\prod_{k=1}^{n}(\tau_k j\omega+1)}=M(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

$$M(\omega)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}\sqrt{(\tau_i\omega)^2+1}}{\prod_{k=1}^{n}\sqrt{(T_k\omega)^2+1}}$$



$$\phi(\omega)=\sum_{i=1}^{n}tg^{-1}(\tau_i\omega)-\sum_{k=1}^{m}tg^{-1}(T_k\omega)$$

$$\omega=0:\ M(0)=K;\ \phi(0)=0^\circ$$

$$\omega\to\infty:\ M(\infty)=0;\ \phi(\infty)=-(n-m)90^\circ$$

a): $n-m=2$ 如 $$\frac{K}{(T_1\omega j+1)(T_2\omega j+1)}$$

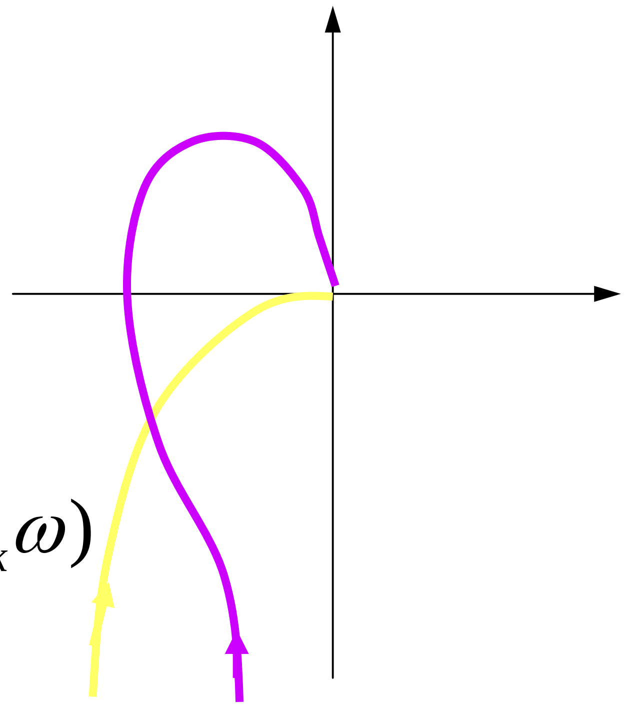
b): $n-m=3$ 如 $$\frac{K}{(T_1\omega j+1)(T_2\omega j+1)(T_3\omega j+1)}$$

2) 1型系统的奈氏图

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{s\prod_{k=1}^{n}(\tau_k s+1)} \qquad (m<n)$$

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i j\omega+1)}{j\omega\prod_{k=1}^{n}(\tau_k j\omega+1)}=M(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

$$M(\omega)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}\sqrt{(\tau_i\omega)^2+1}}{\omega\prod_{k=1}^{n}\sqrt{(T_k\omega)^2+1}}$$



$$\phi(\omega)=-90^\circ+\sum_{i=1}^{\infty}tg^{-1}(\tau_i\omega)-\sum_{k=1}^{\infty}tg^{-1}(T_k\omega)$$

$$\omega=0:\ M(0)=\infty;\ \ \phi(0)=90^\circ$$

$$\omega\to\infty:\ M(\infty)=0;\ \ \phi(\infty)=-(n-m)90^\circ$$

a): $n-m=2$　如 $\dfrac{K}{\omega j(T\omega j+1)}$

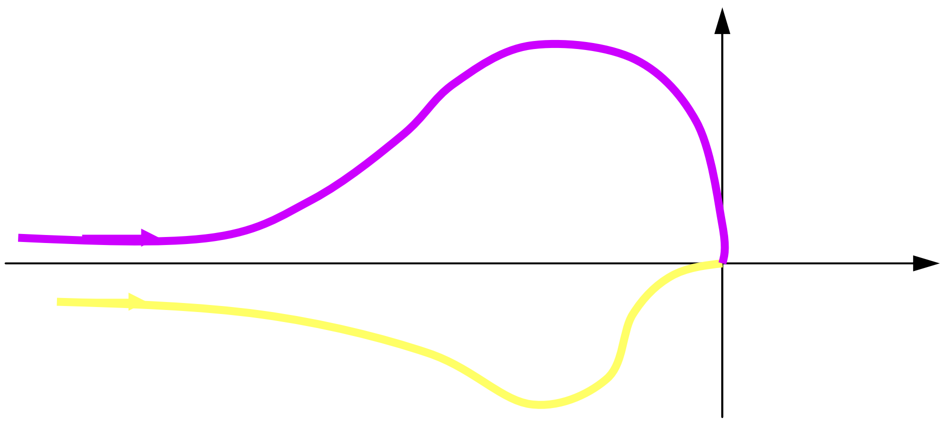
b): $n-m=3$　如 $\dfrac{K}{\omega j(T_1\omega j+1)(T_2\omega j+1)}$

3) 2型系统的奈氏图

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{s^2\prod_{k=1}^{n}(\tau_k s+1)} \qquad (m<n)$$

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i j\omega+1)}{(j\omega)^2\prod_{k=1}^{n}(\tau_k j\omega+1)}=M(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

$$M(\omega)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}\sqrt{(\tau_i\omega)^2+1}}{\omega^2\prod_{k=1}^{n}\sqrt{(T_k\omega)^2+1}}$$



$$\phi(\omega)=-180^\circ+\sum_{i=1}^{\infty}tg^{-1}(\tau_i\omega)-\sum_{k=1}^{\infty}tg^{-1}(T_k\omega)$$

$$\omega=0:\ M(0)=\infty;\ \phi(0)=180^\circ$$

$$\omega\to\infty:\ M(\infty)=0;\ \phi(\infty)=-(n-m)90^\circ$$

a): $n-m=2$ 如 $\dfrac{K(\tau\omega j+1)}{(\omega j)^2(T\omega j+1)}$

b): $n-m=3$ 如 $\dfrac{K}{(\omega j)^2(T\omega j+1)}$

小结： 0，1，2型系统的奈氏图曲线在$\omega\rightarrow\infty$下都终于原点，终点切线为$-90°(n-m)$。 但起点不同，顺时针在s平面上旋转。

系统类型	$\Phi(0)$	$\Phi(\infty)$ （°）
0	0	-(n-m)90
1	-90	-(n-m)90
2	-180	-(n-m)90

第四节　频率特性的对数坐标图

一. 基本概念

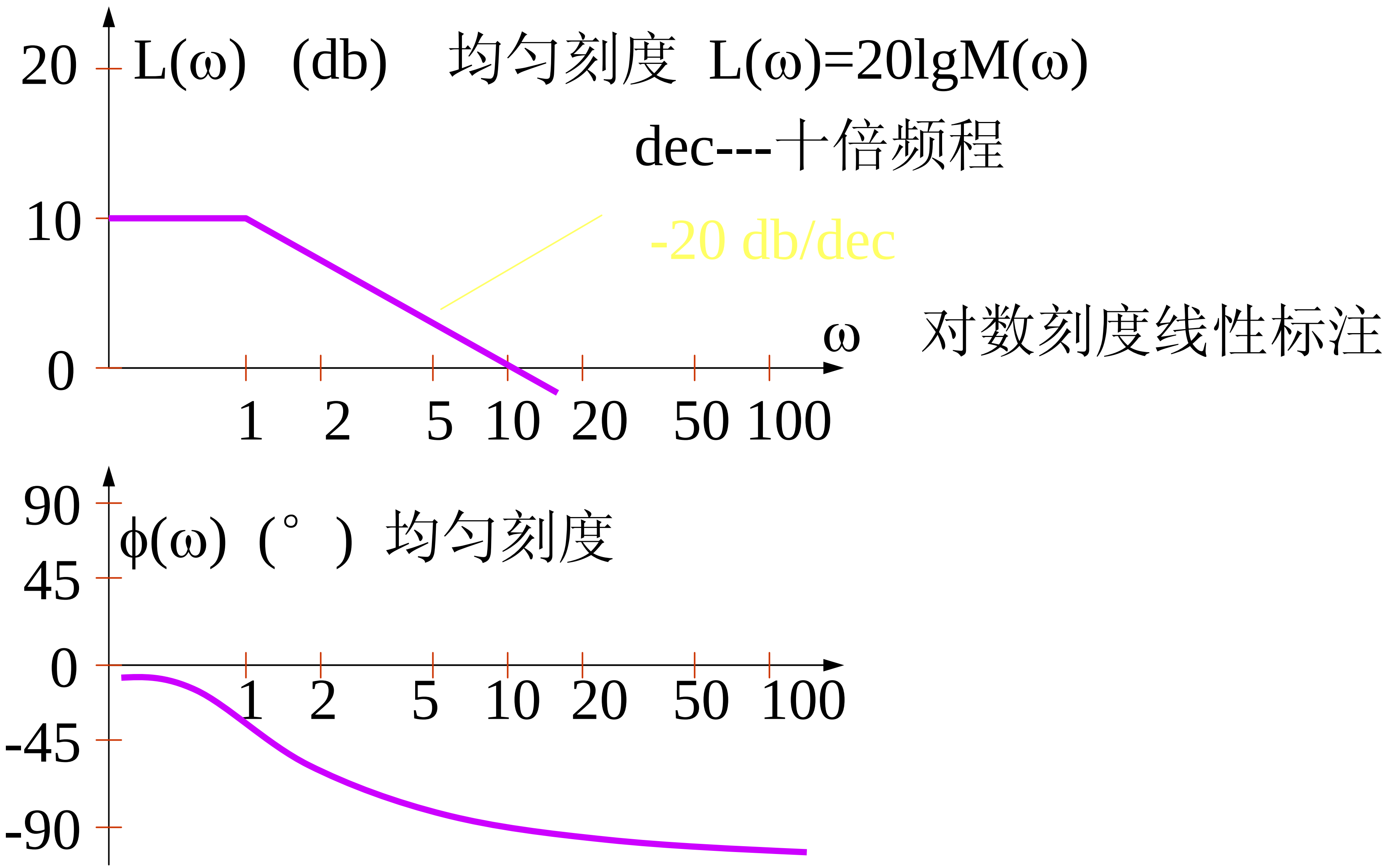
1. 对数坐标图比普通极坐标图优越。　因为取对数后乘除变加减，指数曲线变直线。

2. 常见两种对数坐标图——伯德(Bode)图和对幅相频率特性图。

➢伯德图——由两个图组成：★对数幅频特性图；✸对数相频特性图，都以频率为横轴变量。

➢对数幅相特性图——以对数幅值为纵轴,相角为横轴。

伯德图图示法：$G(j\omega)=M(\omega)e^{j\phi(\omega)}$



互为倒数的对数频率特性图的性质：

图形关于实轴对称，因为互为倒数的对数频率特性的$L(\omega)$ 、$\phi(\omega)$是大小相等，符号相反。

证明：

设

$$G_1(j\omega)=\frac{1}{G_2(j\omega)}$$

则

$$L_1(j\omega)=20\lg G_1(j\omega)=-20\lg G_2(j\omega)=-L_2(j\omega)$$

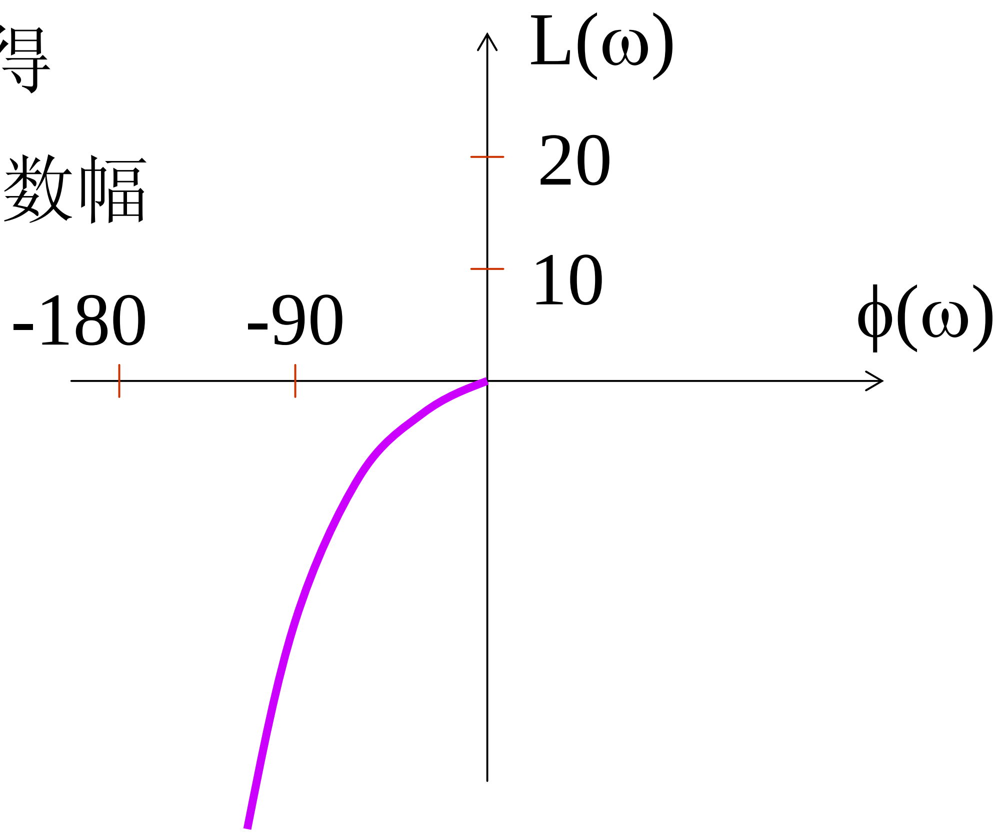
$$\phi(\omega)=\angle G_1(j\omega)=-\angle G_2(j\omega)$$

对数幅相图图示法：

作法：可先作伯德图得

$L(\omega)$ 、 $\phi(\omega)$ ， 在作对数幅

相图

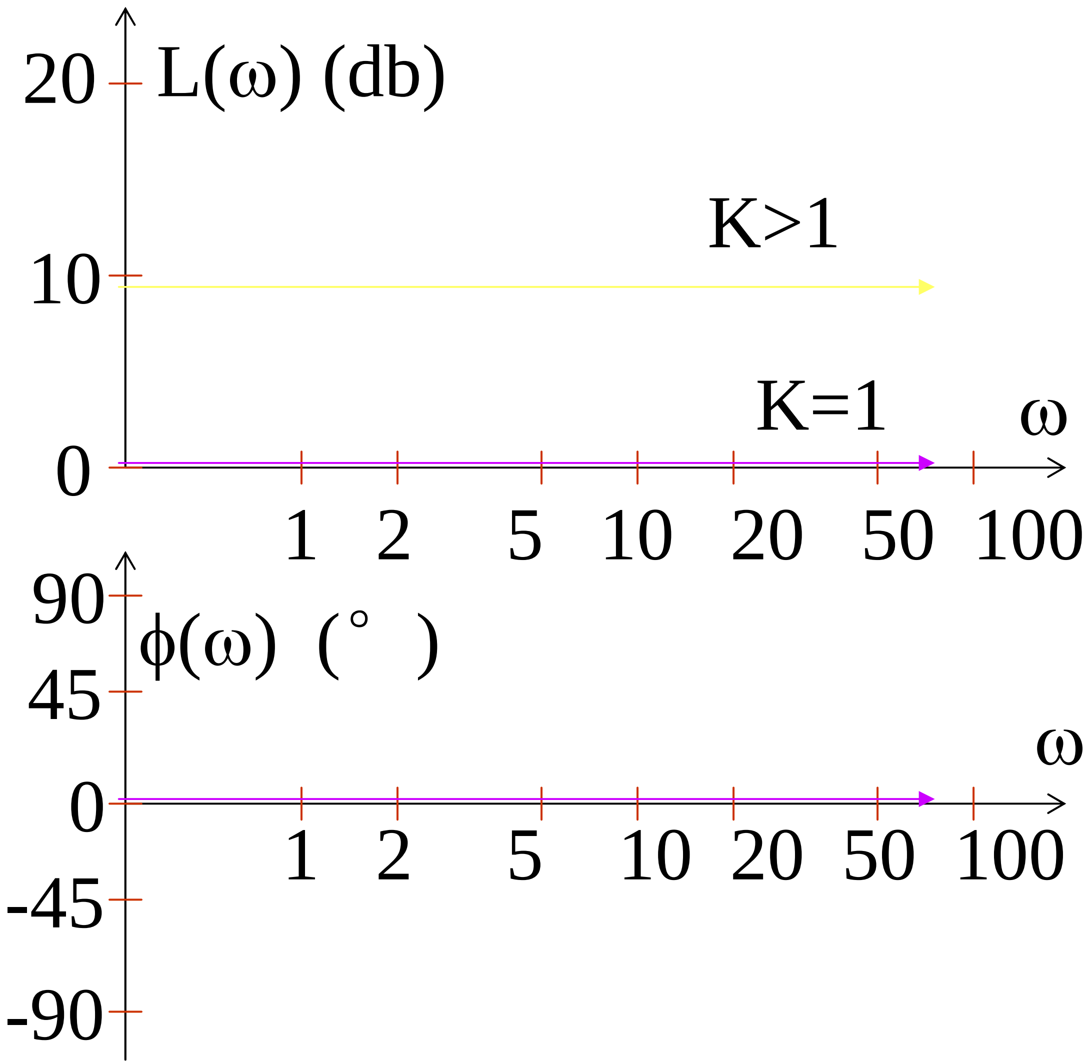


二.典型环节频率特性的伯德图

1. 比例环节(K):

$$L(\omega) = 20\lg K$$

$$\phi(\omega) = 0^\circ$$



2. 积分环节$\left(\dfrac{1}{s}\right)$和微分环节$(s)$:

积分环节

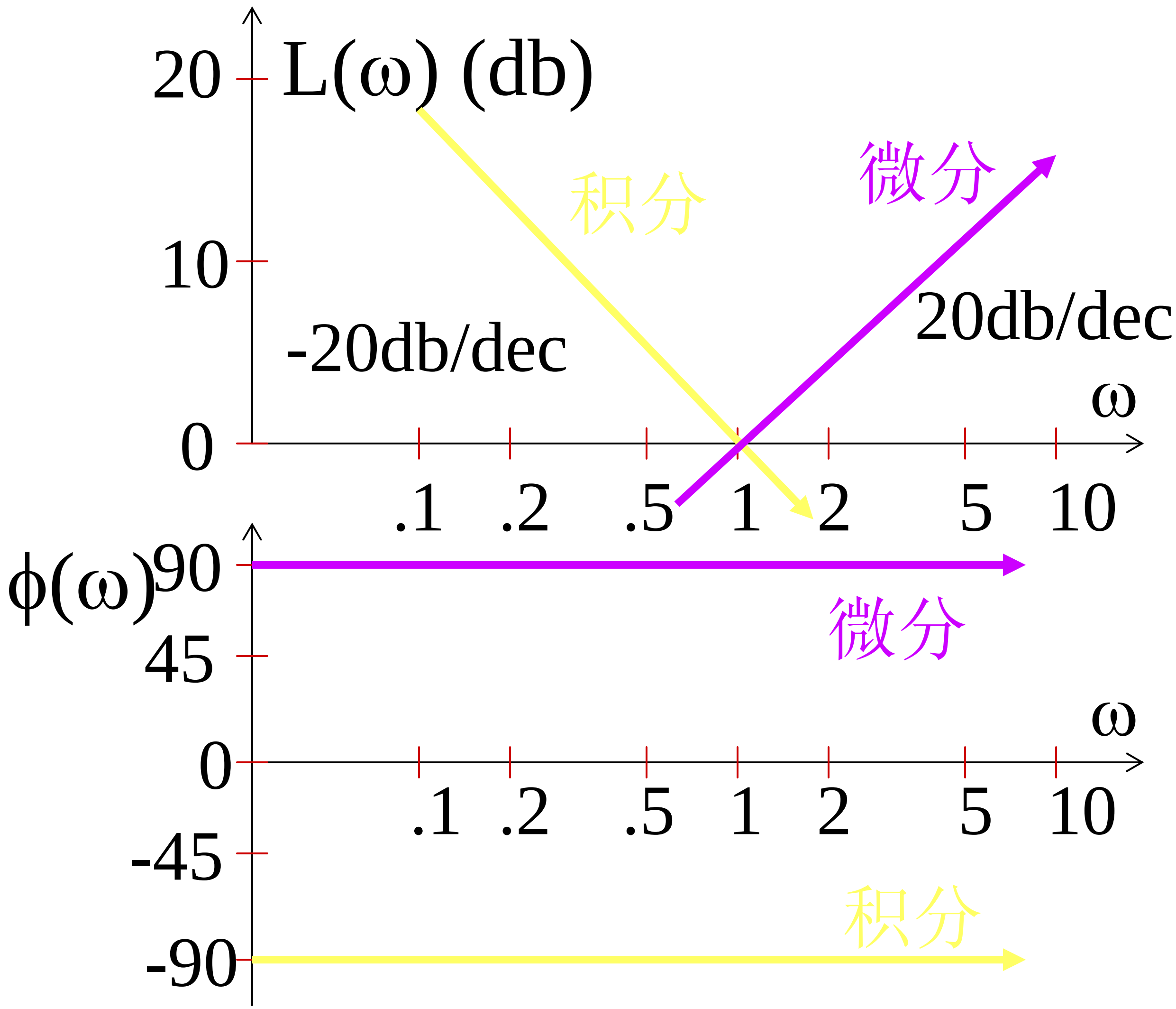
$$L(\omega)=20\lg\left|\frac{1}{j\omega}\right|=-20\lg\omega$$

$$\phi(\omega)=-tg^{-1}\left(-\frac{1}{\omega}\Big/0\right)=-90^{\circ}$$

微分环节

$$L(\omega)=20\lg\omega$$

$$\phi(\omega)=90^{\circ}$$



20
10
0
L(ω) (db)
积分
微分
-20db/dec
20db/dec
ω
.1 .2 .5 1 2 5 10
φ(ω)
90
45
0
-45
-90
微分
ω
.1 .2 .5 1 2 5 10
积分

3.惯性环节$\left(\frac{1}{1+Ts}\right)$和比例微分环节$(Ts+1)$：

1）惯性环节

$$L(\omega) = -20\lg\sqrt{1+(T\omega)^2}$$

$$\phi(\omega) = tg^{-1}T\omega$$

分析：

★$\omega \ll \frac{1}{\mathrm{T}}$，$L(\omega) \approx 0$

✸$\omega \gg \frac{1}{\mathrm{T}}$，$L(\omega) \approx -20\lg T\omega$

✹ 渐近线与原曲线的误差

$$\omega = \frac{0.5}{T},$$

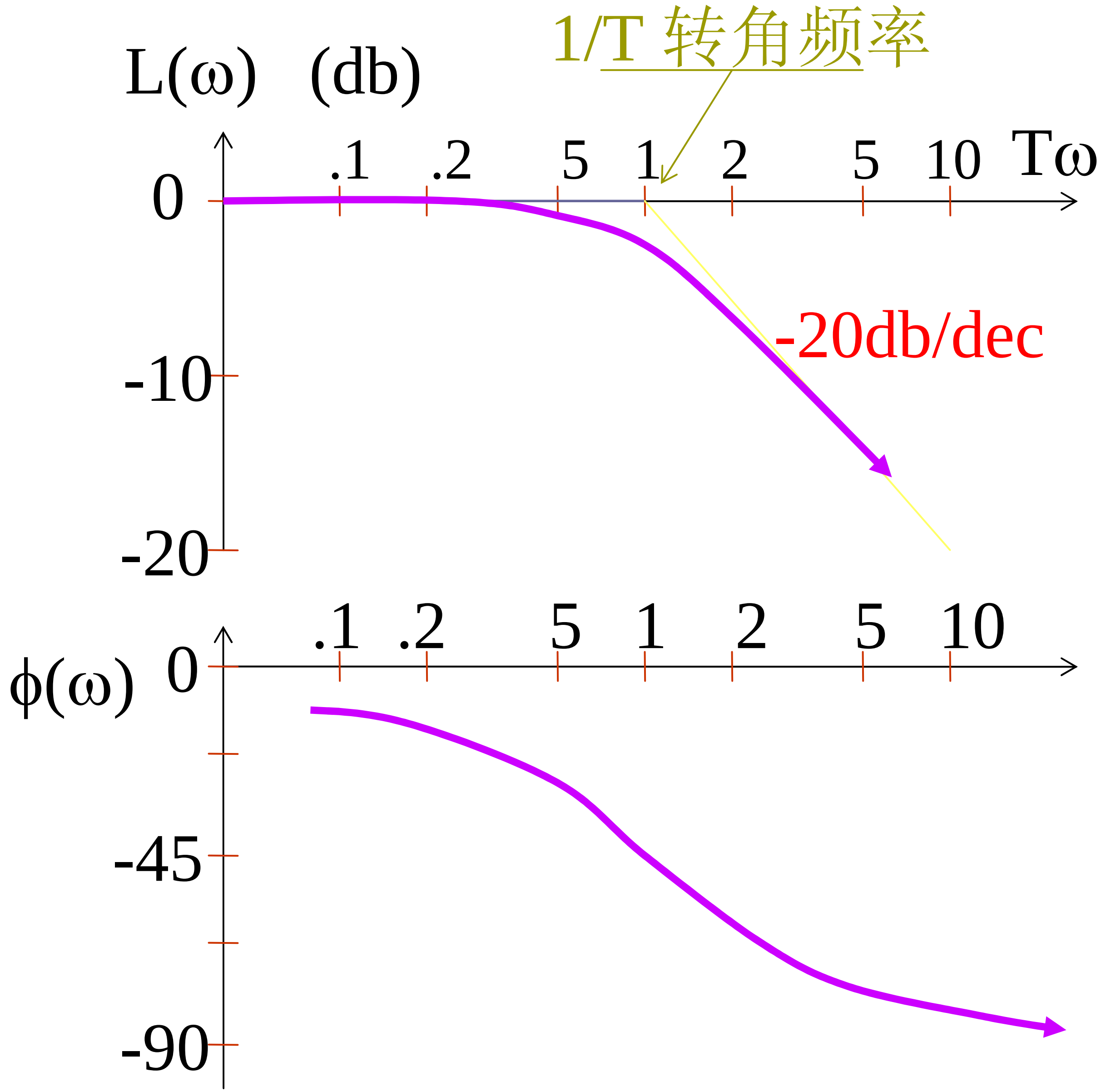
$$\Delta L = -20\lg\sqrt{0.5^2+1} - 0 = -1$$

$$\omega = \frac{2}{T},$$

$$\Delta L = -20\lg\sqrt{2^2+1} - 20\lg 2 = -1$$

$$\omega = \frac{1}{T},$$

$$\Delta L = -20\lg\sqrt{1^2+1} - 0 = -3$$

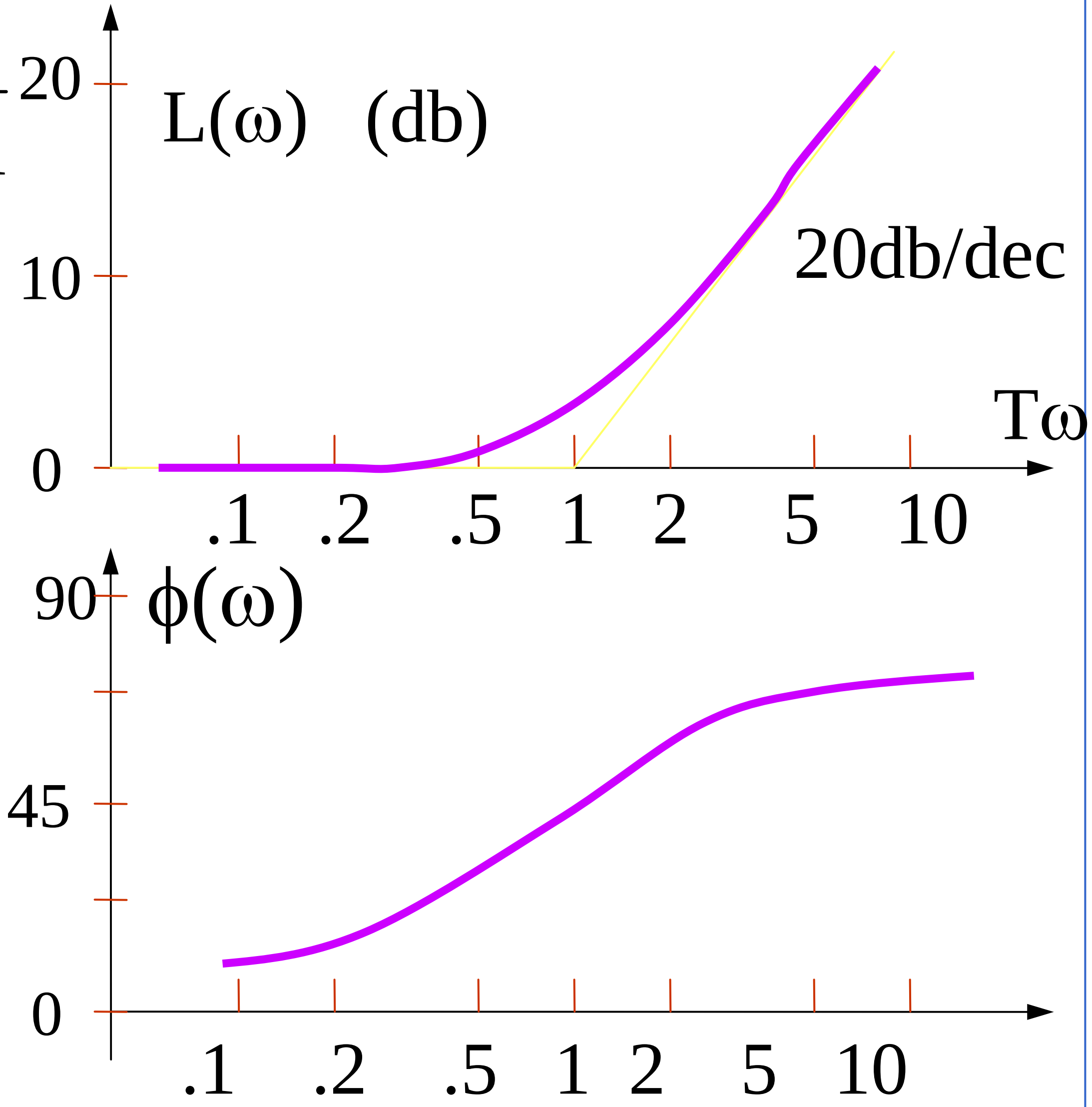


1/T 转角频率
L(ω) (db)
.1 .2 5 1 2 5 10 Tω
0
-10
-20
-20db/dec
.1 .2 5 1 2 5 10
φ(ω) 0
-45
-90

2）比例微分环节$1+j\omega T$与$\dfrac{1}{1+j\omega T}$互为倒数，根据互为倒数的频率特性图的性质

$$L(\omega)=-20\lg\sqrt{(\omega T)^2+1}$$

$$\phi(\omega)=tg^{-1}T\omega$$



4. 二阶环节$\left(\dfrac{\omega^2}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}\right)$和$s^2+2\zeta\omega s+\omega^2$

1）当$\zeta>1$时成为二阶惯性环节和二阶微分环节

$$\left(\frac{1}{T_1 s+1}\right)\left(\frac{1}{T_2 s+1}\right)\text{和}\left(T_1 s+1\right)\left(T_2 s+1\right)$$

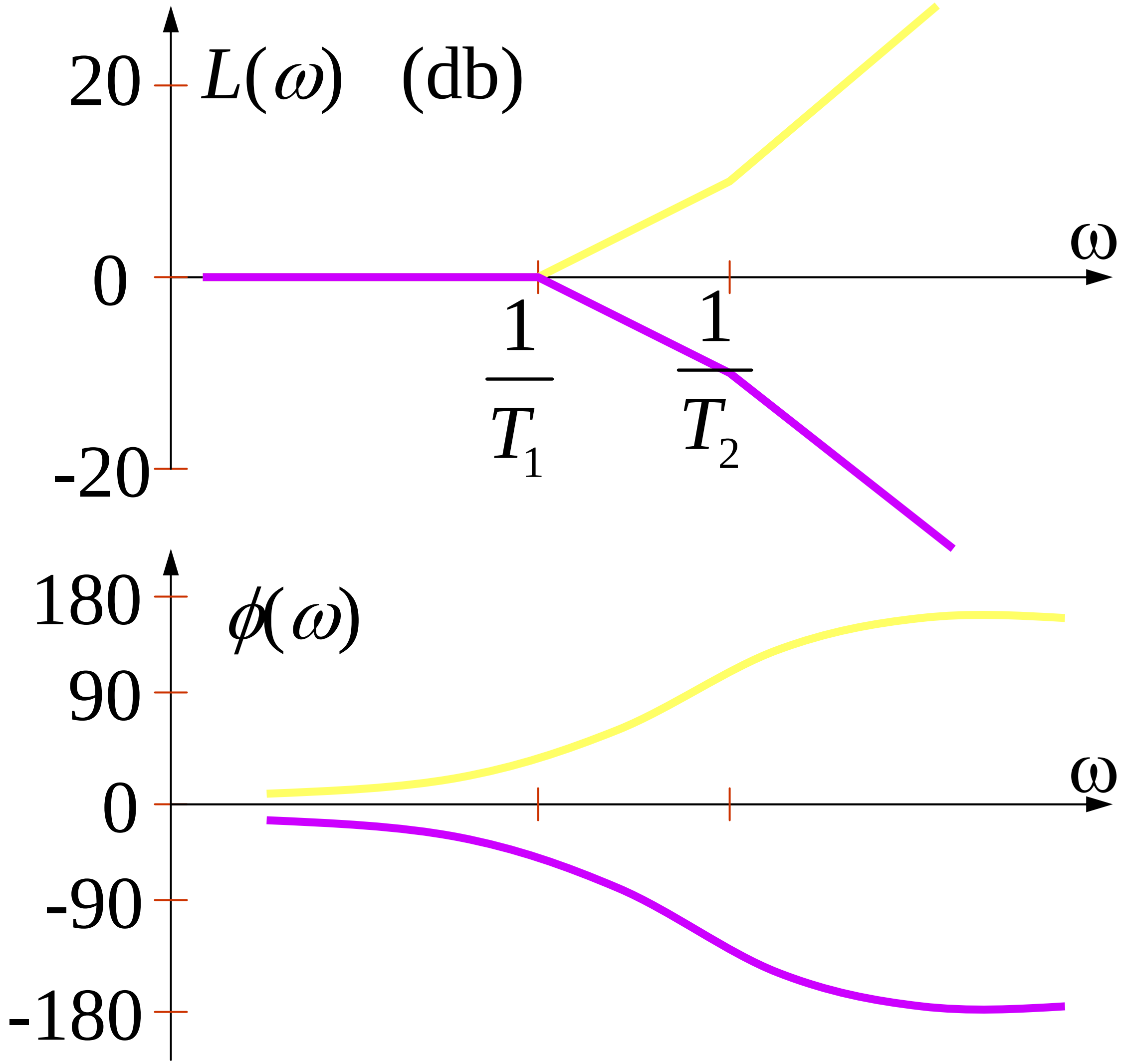
2）当$0<\zeta<1$时为二阶振荡环节$s^2+2\zeta\omega_n s+(\omega_n)^2$

（现主要讨论二阶振荡环节，其倒数环节不常用）

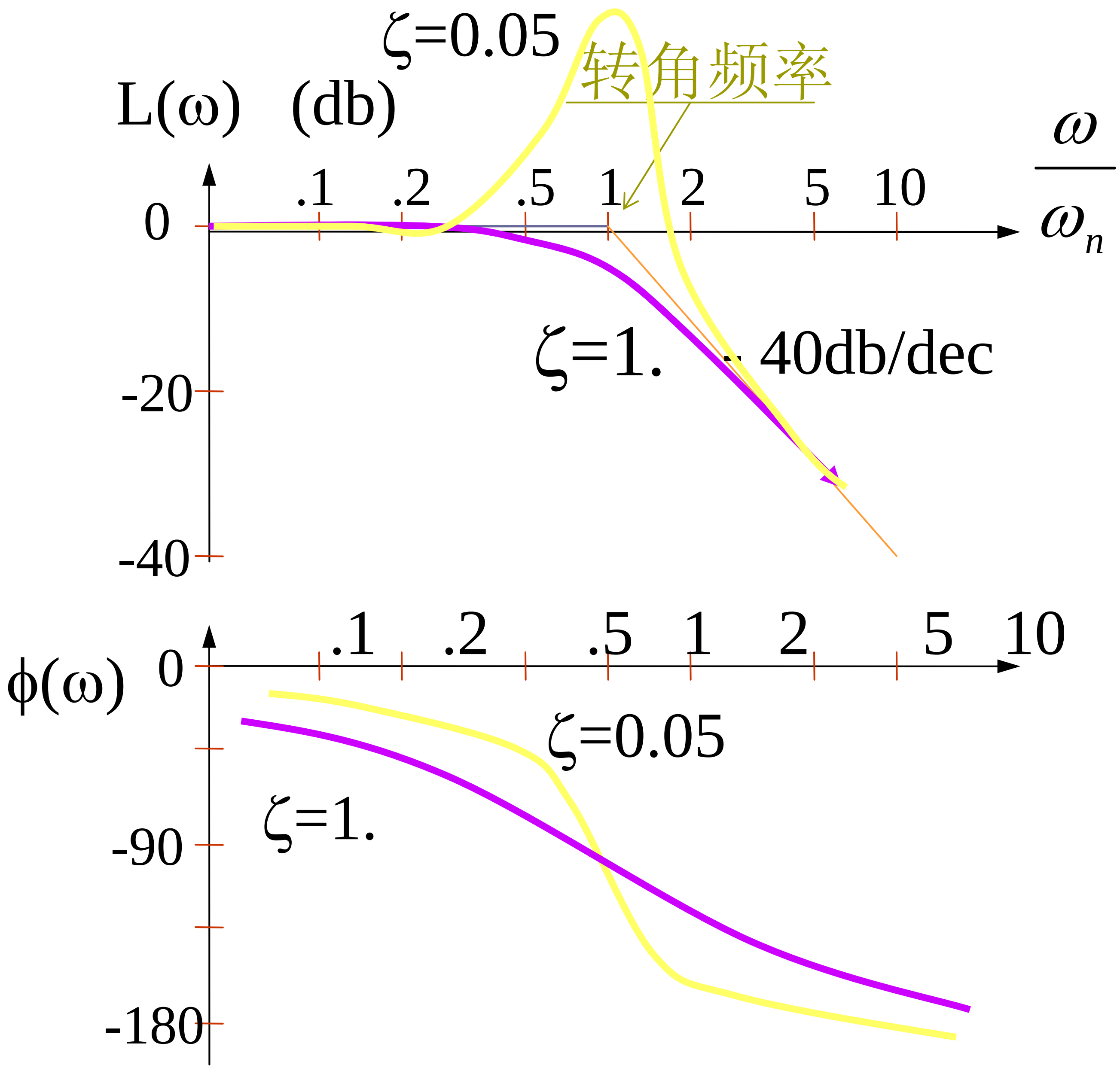
$$G(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n j\omega+\omega_n^2}=\frac{e^{-j\,arctg\left(\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-\omega/\omega_n}\right)}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$L(\omega)=-20\lg\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\phi(\omega)=-tg^{-1}\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$



20
$L(\omega)$ (db)
0
ω
$\frac{1}{T_1}$
$\frac{1}{T_2}$
-20
180
$\phi(\omega)$
90
0
ω
-90
-180



ζ=0.05
转角频率
L(ω) (db)
.1 .2 .5 1 2 5 10
0
-20
-40
ζ=1.
-40db/dec
ω/ωn
ϕ(ω)
0
.1 .2 .5 1 2 5 10
ζ=0.05
ζ=1.
-90
-180

分析：

i) $\omega<<\omega_n$ 低频渐近线$L(\omega)=0$；

ii) $\omega>>\omega_n$高频渐近线$L(\omega)\approx -20\lg\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$

iii) ζ对$L(\omega)$曲线影响很大，主要集中在$\frac{\omega}{\omega_n}=1$处 。

ω_n为转角频率。

iv) 谐振频率与谐振幅值

令 $\frac{dL(\omega)}{d\omega}=0$，可求得

谐振频率 $\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \qquad 0<\zeta\le 0.707$

谐振幅值 $M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad 0<\zeta\le 0.707$

v) 渐近线与精确曲线之间的误差见下图5-1。

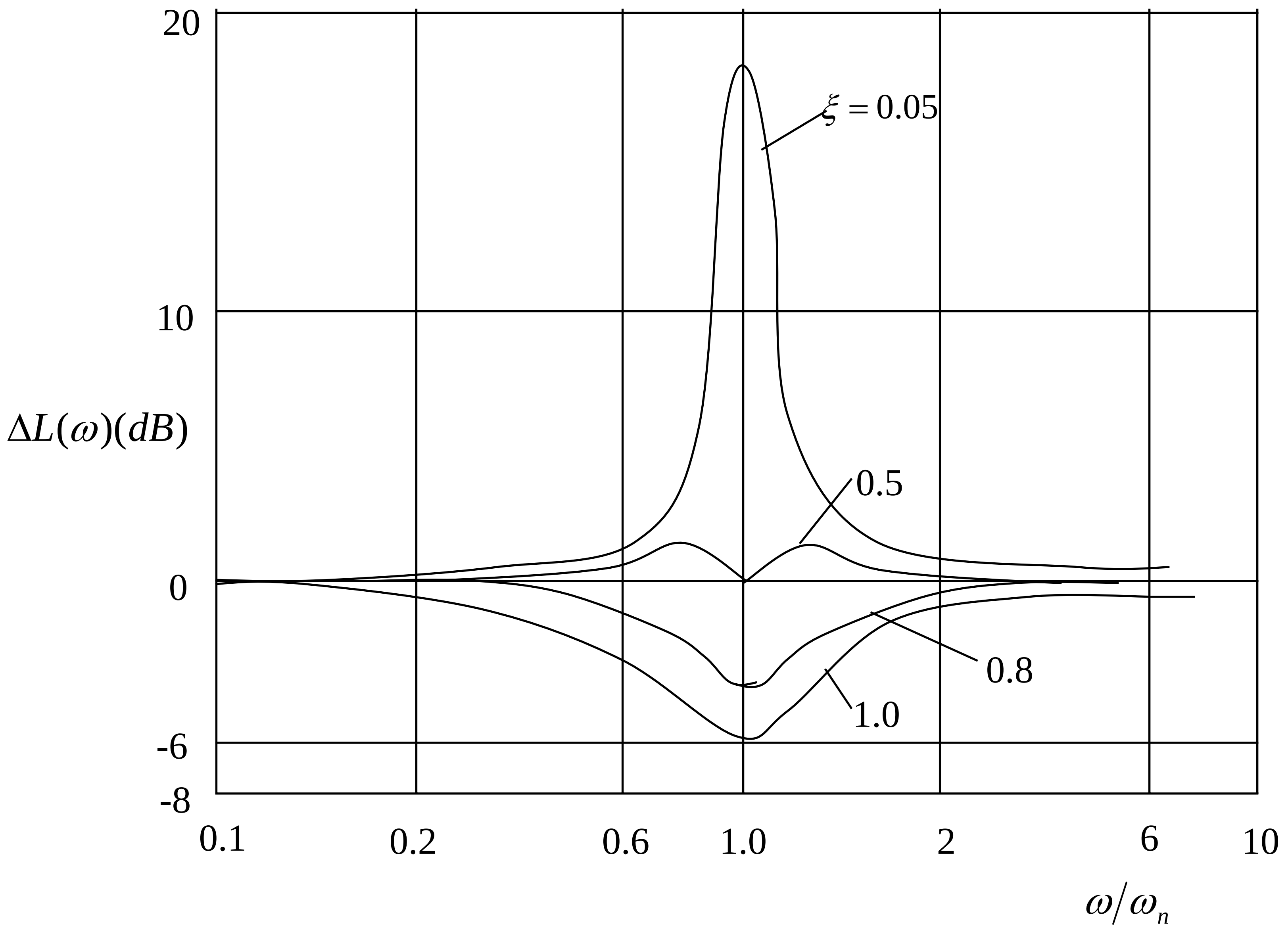
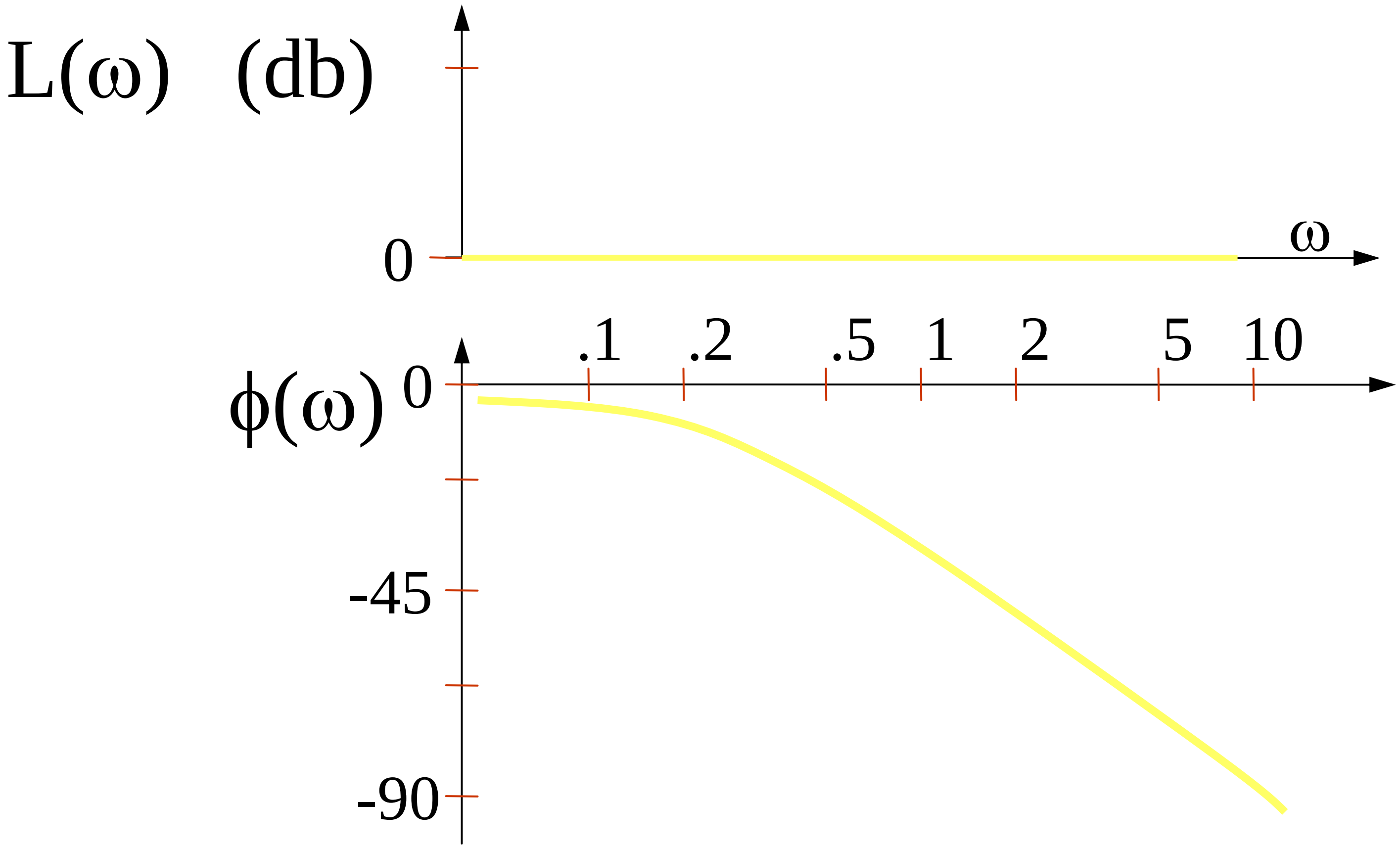


图5-1 二阶振荡环节幅频特性误差曲线

5. 延迟环节 $e^{-\tau s}$

$$L(\omega) = 20\lg 1 = 0$$

$$\phi(\omega) = -\tau\omega(rad) = -57.3\tau\omega(^\circ)$$



三. 开环系统频率特性对数坐标图

—伯德（Bode）图

绘制Bode图的步骤：

1. 将整理成典型环节乘积形式；
2. 找出各环节的转角频率，并从大到小排列；
3. 画L(ω)渐近线，从左至右，每遇一个转角频率便改变斜率，如遇一阶惯性则–20dB/dec，遇 $\dfrac{\omega^2}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}$，为–40dB/dec。

4. 画精确曲线：即在转角频率处对渐近线修正对一阶环节：在转角频率处-3db，在左右一倍频处-1db。

对二阶环节按图5-1修正

5. 计算相频特性Φ(ω)值：

取若干点ω_1，ω_2，…，ω_N。计算各$\phi(\omega_i)$值

$\phi(\omega_i)=\sum\alpha-\sum\beta$

$\sum\alpha$：分子因式相角和; $\sum\beta$:分母因式相角和

6. 连接各$\phi(\omega_i)$，描成曲线。

例：$G(s)H(s)=\dfrac{10(0.5s+1)}{s(2s+1)(10s+1)}$ 求Bode图。

解： 1）

✶ ✷ ✹ ✵ ⌖

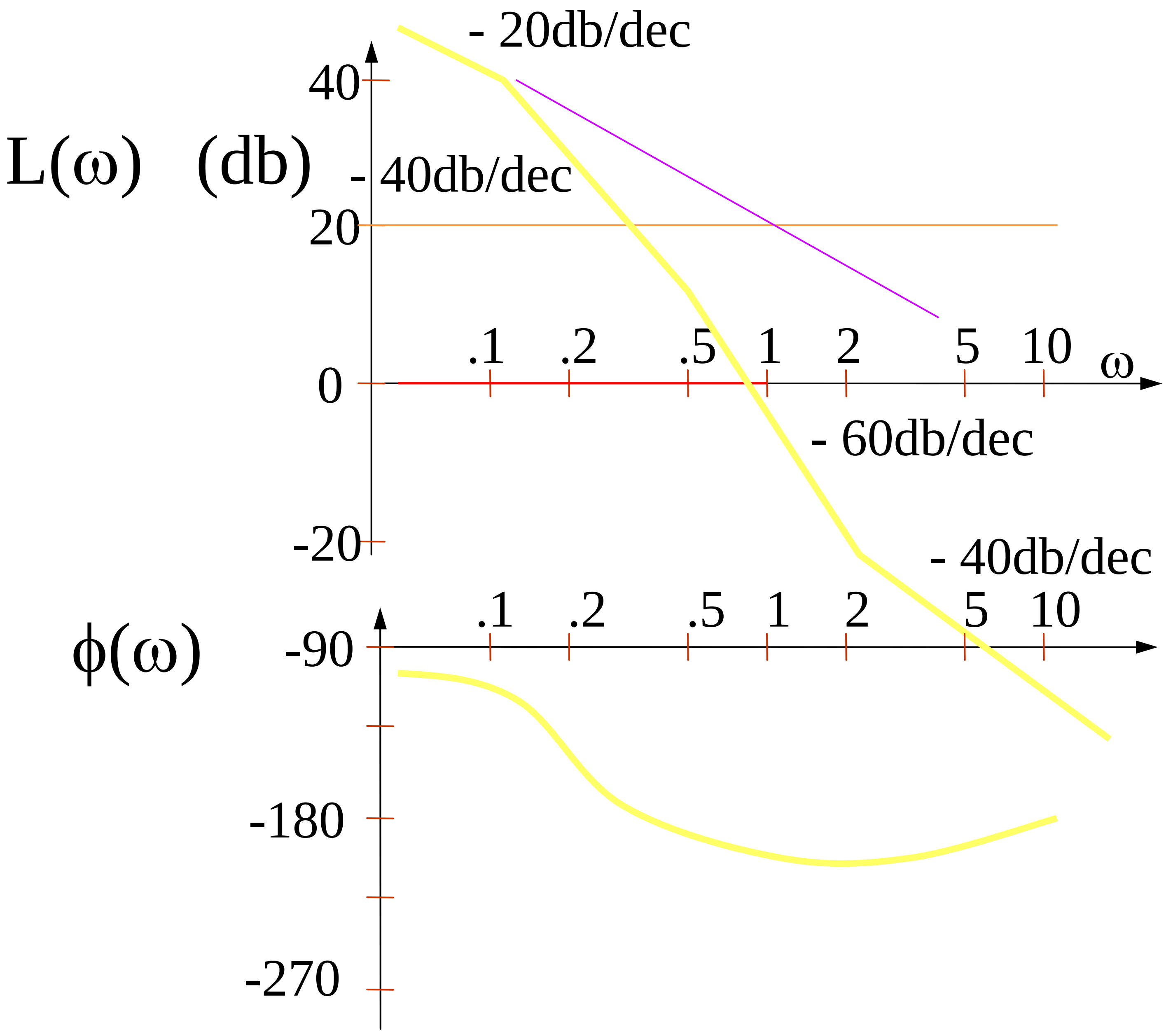
$$G(j\omega)H(j\omega)=10\cdot\frac{1}{j\omega}\cdot\frac{1}{10j\omega+1}\cdot\frac{1}{12j\omega+1}\cdot(0.5j\omega+1)$$

2）转角频率 $(\omega=\dfrac{1}{T})$: 0, 0, 0.1, 0.5, 2,

3）画渐近线　　从环节✶至环节⌖

4）修正曲线　在转角频率处-3db

5）计算$\phi(\omega)$=$\sum\alpha-\sum\beta$ 画$\phi(\omega)$，　如$\phi(1)$=-210



- 20db/dec
40
L(ω) (db)
- 40db/dec
20
.1 .2 .5 1 2 5 10 ω
0
- 60db/dec
-20
- 40db/dec
.1 .2 .5 1 2 5 10
φ(ω)
-90
-180
-270

四. 最小相位系统和非最小相位系统

定义：

最小相位系统——开环传函零极点不在右半平面。

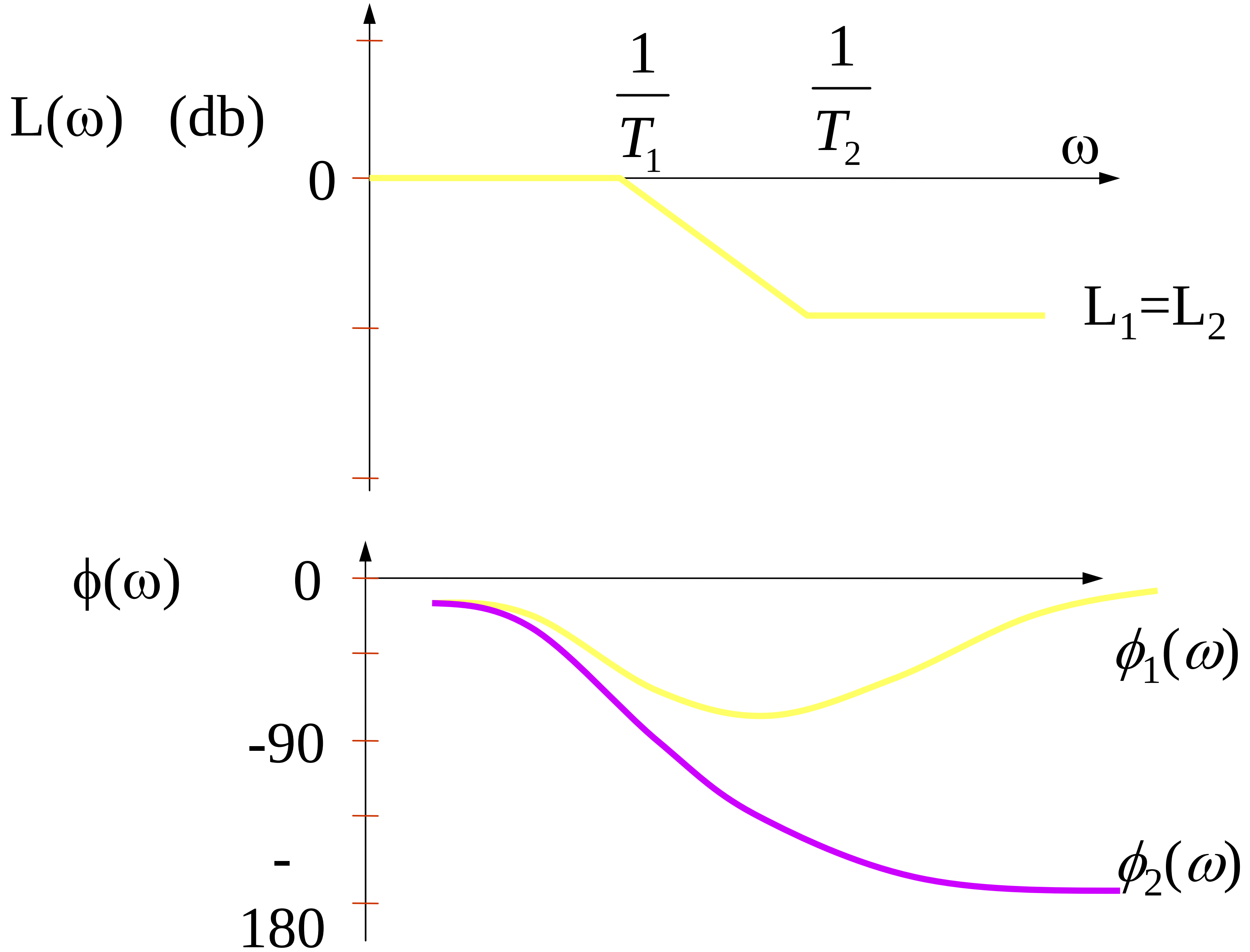
非最小相位系统—— 有开环传函零极点在右半平面。

之所以称最小相位系统，顾名思义相位变化最小。

例：
$$G_1(s)=\frac{1+T_2 s}{1+T_1 s} \quad T_1>T_2>0$$

$$G_2(s)=\frac{1-T_2 s}{1+T_1 s} \quad T_1>T_2>0$$

两者幅频特性相同，但相频特性不同。



L(ω) (db)
0
1/T1
1/T2
ω
L1=L2
φ(ω)
0
-90
-180
φ1(ω)
φ2(ω)

对于最小相位系统的判别

✶看开环零极点；

✶看ω→∞时 相角极限

若 $\angle G(j\omega)\big|_{\omega\to\infty}=0=(n-m)(-90^\circ)$ 则为最小相位系统，否若则为非最小相位系统。

上例：$\angle G_1(j\omega)\big|_{\omega\to\infty}=0=(n-m)(-90^\circ)$

$$\angle G_2(j\omega)\big|_{\omega\to\infty}=-180^\circ\neq(n-m)(-90^\circ)$$

含延迟环节的系统是典型非最小相位系统。

非最小相位系统含有较大相位滞后，很难控制。所以非最小相位系统是我们所不期望的。但是计算机控制系统常常是非最小相位系统，使我们不得不面对它。

第五节　控制系统的奈氏图分析

一.奈氏判据的基本原理

奈氏判据——频域分析中最重要的稳定性判据。叙述见后两节。

先讨论三个重要概念：

1. 特征函数的零点和极点
2. 幅角原理
3. 奈氏轨迹及其映射

1. 特征函数的零点和极点

特征函数—— $F(s)=1+G(s)H(s)$

对应的闭环系统 $\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$

$F(s)=0$ 即为闭环系统的特征方程。

若 $GH=\dfrac{B(s)}{A(s)}$ 则 $F(s)=1+\dfrac{B(s)}{A(s)}=\dfrac{K\prod\limits_{i=1}^{n}(s+z_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(s+p_i)}$

推论：**F(s)**的极点是开环传函极点；**F(s)**的零点是闭环传函极点，若要闭环稳定，则**F(s)**的全部零点必须位于**s**左半平面。

2. 幅角原理

奈氏判据的理论基础是复变函数的幅角原理。应用幅角原理可导出奈氏判据的重要公式：

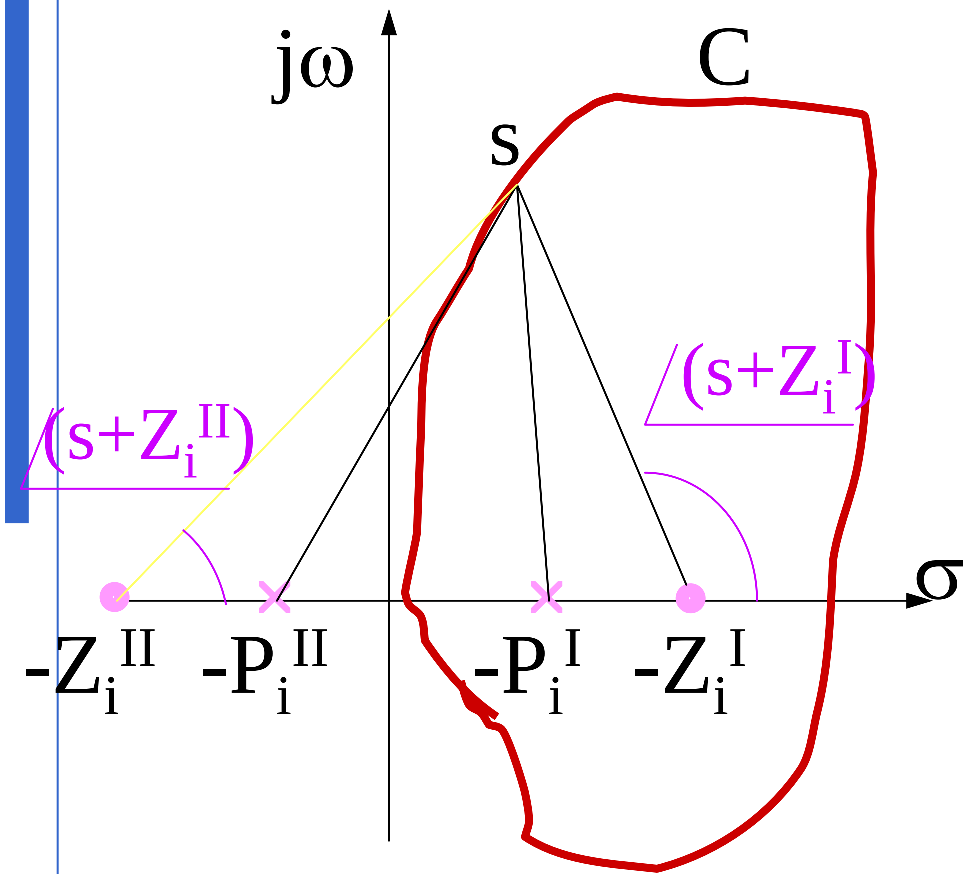
$$N = P - Z$$

式中

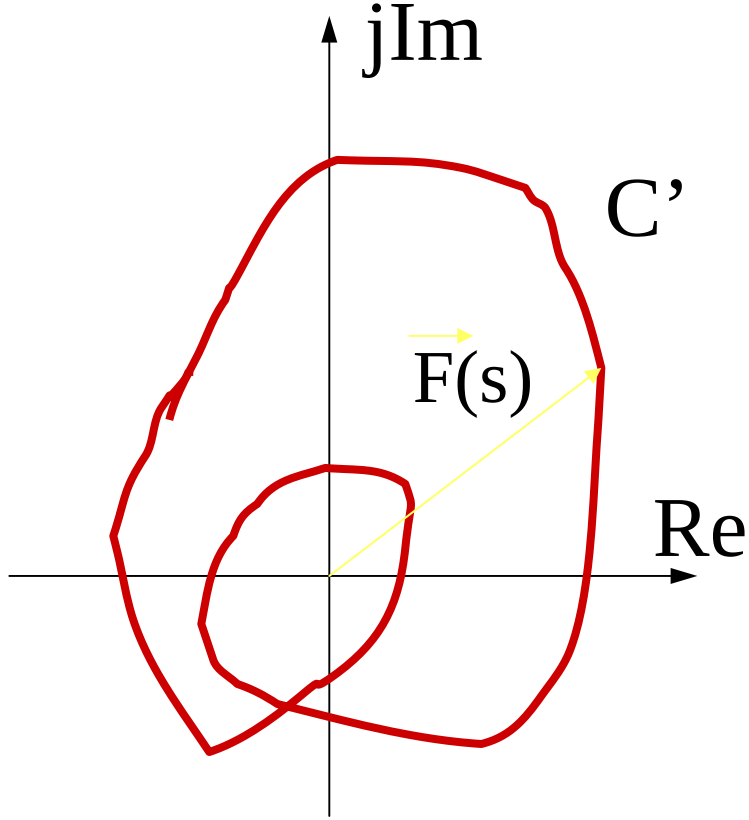
Z——s平面上被封闭曲线C包围的$F(s)$的零点数

P——s平面上被封闭曲线C包围的$F(s)$的极点数

N ——F平面中封闭曲线C’包围原点的次数



*s*平面



*F*平面

证：设封闭曲线C不通过**s**平面上任一零极点，且包围Z个零点P个极点，记为

$$\left\{P_i^I,\ \ i=1,2,\cdots,\ \ P\right\}\quad \left\{-Z_i^I,\ \ i=1,2,\cdots,\ \ Z\right\}$$

未被包围的零极点记为

$$\left\{P_i^{II},\ \ i=P+1,\cdots,\ \ n\right\}\quad \left\{-Z_i^{II},\ \ i=Z+1,\cdots,\ \ m\right\}$$

对于任一点s有F平面映射

$$F(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{Z}(s+Z_i^I)\prod_{i=Z+1}^{m}(s+Z_i^{II})}{\prod_{i=1}^{P}(s+P_i^I)\prod_{i=P+1}^{n}(s+P_i^{II})}$$

$$\angle F(s)=\sum_{i=1}^{Z}\angle(s+Z_i^{I})+\sum_{i=Z+1}^{m}\angle(s+Z_i^{II})$$

$$-\sum_{i=1}^{P}\angle(s+P_i^{I})-\sum_{i=P+1}^{n}\angle(s+P_i^{II})$$

当变点s沿C顺时针移动一圈，则有

$$\Delta\angle F(s)=\sum_{i=1}^{Z}\Delta\angle(s+Z_i^{I})+\sum_{i=Z+1}^{m}\Delta\angle(s+Z_i^{II})$$

$$-\sum_{i=1}^{P}\Delta\angle(s+P_i^{I})-\sum_{i=P+1}^{n}\Delta\angle(s+P_i^{II})$$

$$=Z(-360^{\circ})+0^{\circ}-P(-360^{\circ})-0^{\circ}$$

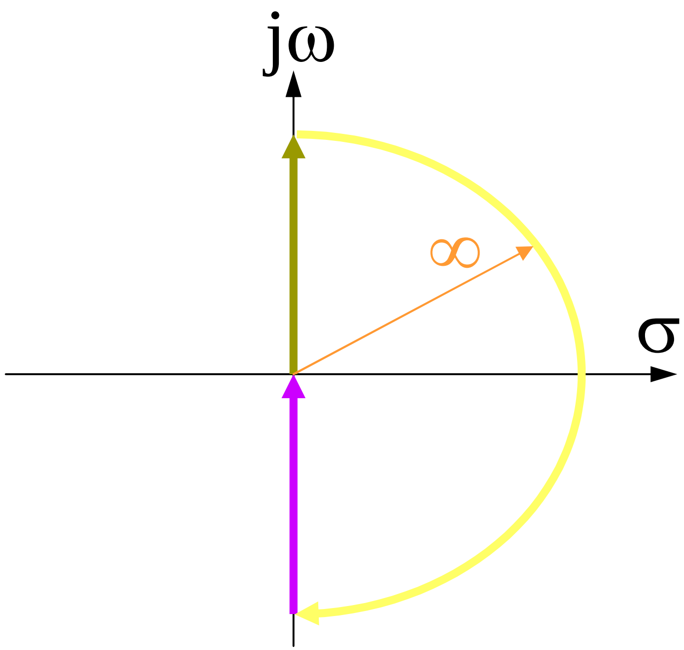
$$=(-360^{\circ})(Z-P)$$

$$=360^{\circ}(P-Z)$$

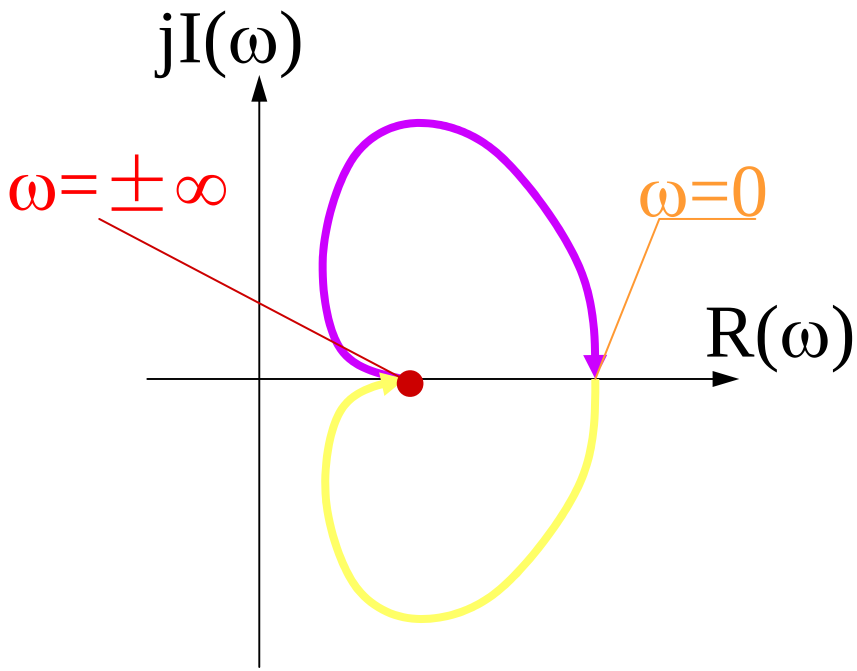
这表明$\overrightarrow{F(s)}$端点沿C'逆时针包围原点的次数为P-Z=N。

3. 奈氏轨迹及其映射

若选取适当的封闭曲线将s平面右半平面包围起来，则变点s顺时针方向沿虚轴和半径为∞的右半圈绕一周形成的封闭曲线称为Nyquist轨迹，简称奈氏轨迹。



S平面的奈氏轨迹



F(jω)平面的奈氏曲线

奈氏轨迹在平面的映射也为一个封闭曲线， 称为奈氏曲线，例如

ω：0→∞上半虚轴映射为

ω：−∞→0下半虚轴映射为

右半圈映射为(0,1)，因为当 $n > m$

$$F(s) = 1 + G(s)H(s)\Big|_{s\to\infty} = 1$$

回忆幅角原理 ***N*=*P*–*Z***，**F**的零点即闭环极点。

若要稳定，闭环极点应不在s右半平面。若以奈氏轨迹为封闭曲线C，则它所包围的s右半平面零点数$Z=0$，才有系统稳定，据幅角原理有$Z=P-N=0$（N为奈氏曲线包围坐标原点的次数，P为奈氏轨迹包围的开环极点数）

若考虑$G(j\omega)H(j\omega)$平面，则相当于$F(j\omega)$曲线左移一个单位的奈氏图，即开环幅相频率特性，原F平面原点对应于GH平面(–1, j0)点

$$G(j\omega)H(j\omega)=F(j\omega)-1$$

∴若要系统稳定，则$Z=P-N=0$，N为GH映射曲线绕(–1,j0)点次数

二. 奈氏稳定性判据一

若奈氏曲线$G(j\omega)H(j\omega)$逆时针包围(–1, **j0**)点的次数***N***等于位于右半平面上开环极点数***P***。则闭环系统稳定，否则闭环系统不稳定。

约束条件：在原点和虚轴上无零极点。奈氏轨迹不能穿过零极点。

讨论：当奈氏曲线通过(–1,j0)点，则表示闭环系统临界稳定，也归为不稳定。

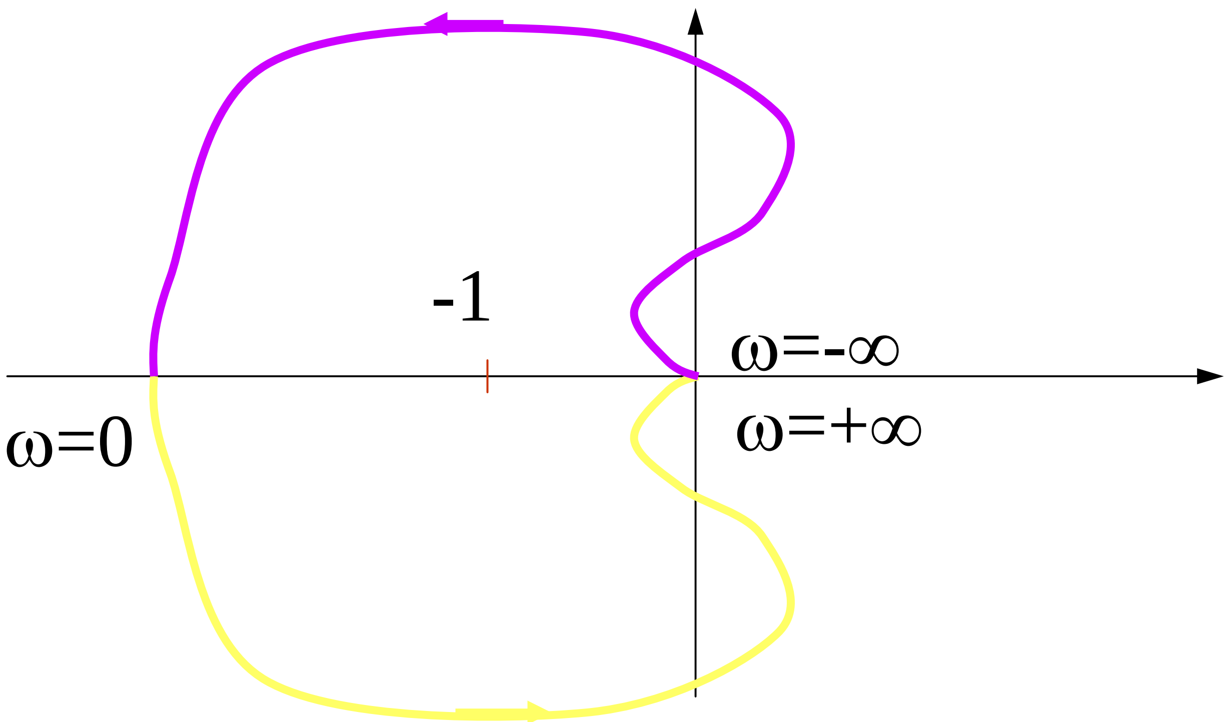
应用奈氏稳定性判据一的步骤：

- 绘$G(j\omega)H(j\omega)$ 的奈氏图，可先绘 ω:0→∞一段，再以实轴对称的方法添上ω:−∞→0的一段；
- 计算奈氏曲线包围(−1,j0)点的次数N
- 由给定的G(s)H(s)确定右半平面上开环极点数 P
- 计算 $P-N$，若 $P-N=0$ 则闭环稳定

例：$G(s)H(s)=\dfrac{K(T_a s+1)}{(T_1 s-1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$

解：作奈氏轨迹如下图示:

N=1， P=1 有Z=N–P=0 故系统稳定

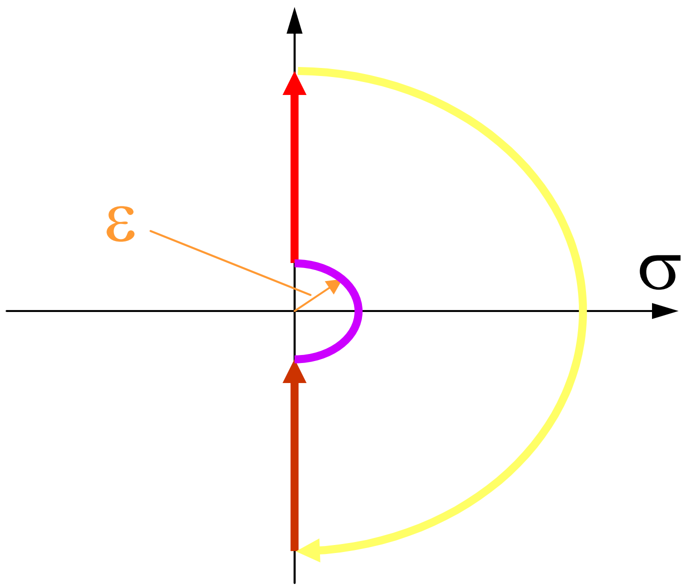


三. 奈氏稳定性判据二

若增补奈氏曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ 当(ω:–∞→∞)逆时针包围(–1, j0)点的次数N等于位于右半平面上开环极点数P。则闭环系统稳定，否则闭环系统不稳定。

所谓增补就是使奈氏轨迹绕开位于原点和虚轴上的开环零极点。

增补奈氏轨迹：



增补奈氏轨迹映射出的奈氏轨迹分析：

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{s^M\prod_{i=1}^{n-M}(T_i s+1)}$$

当 $s=\varepsilon e^{j\theta}$ $\quad(\theta:-90^\circ\rightarrow 0^\circ\rightarrow 90^\circ)$

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(0+1)}{\varepsilon^M e^{jM\theta}\prod_{i=1}^{n-M}(0+1)}=\frac{K}{\varepsilon^M e^{jM\theta}}=\infty e^{-jM\theta}$$

可见增补奈氏轨迹映射为半径∞的圆曲线变

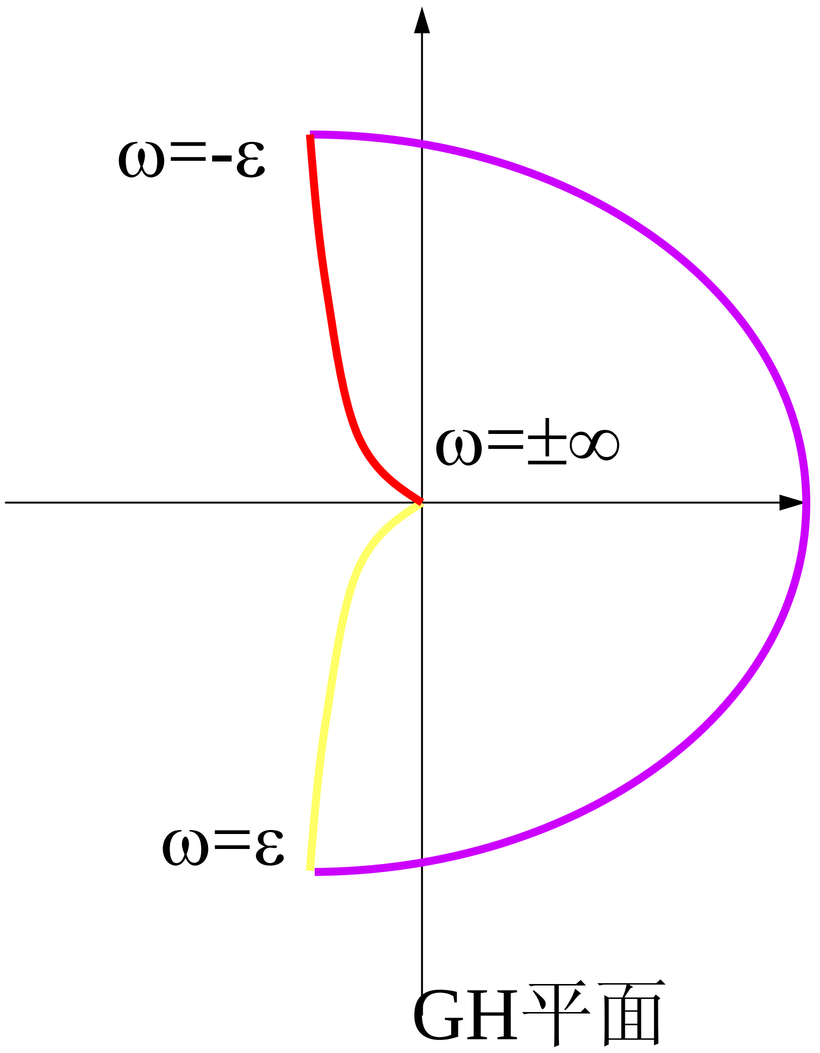
点相角变化从$M90° \rightarrow -M90°$　如 $M=1$，

$-M\theta$：$90° \rightarrow 0° \rightarrow 90°$

M=2时，-Mθ：180° →0° →180°

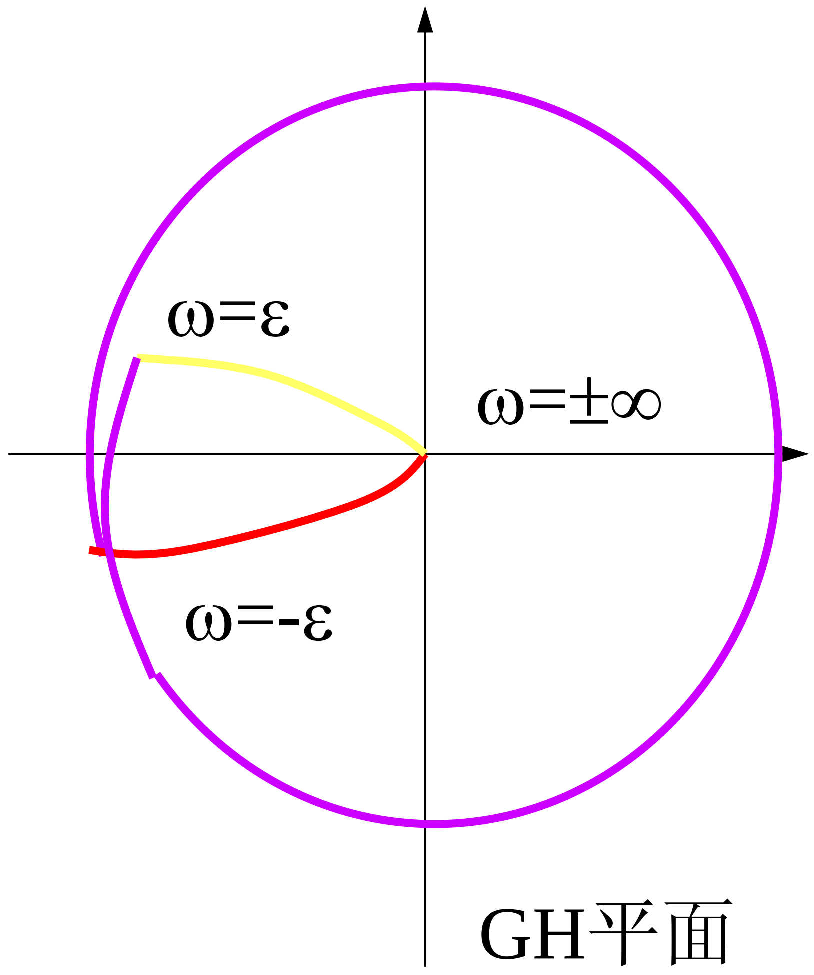
一型系统的奈氏曲线

（$-M\theta$：90°→0° → -90°）



二型系统的奈氏曲线

（$-M\theta$：180°→0° →-180°）



例：设开环传函 $G(s)H(s)=\dfrac{10}{s(s+1)(s+2)}$

试用奈氏判据判定系统稳定性

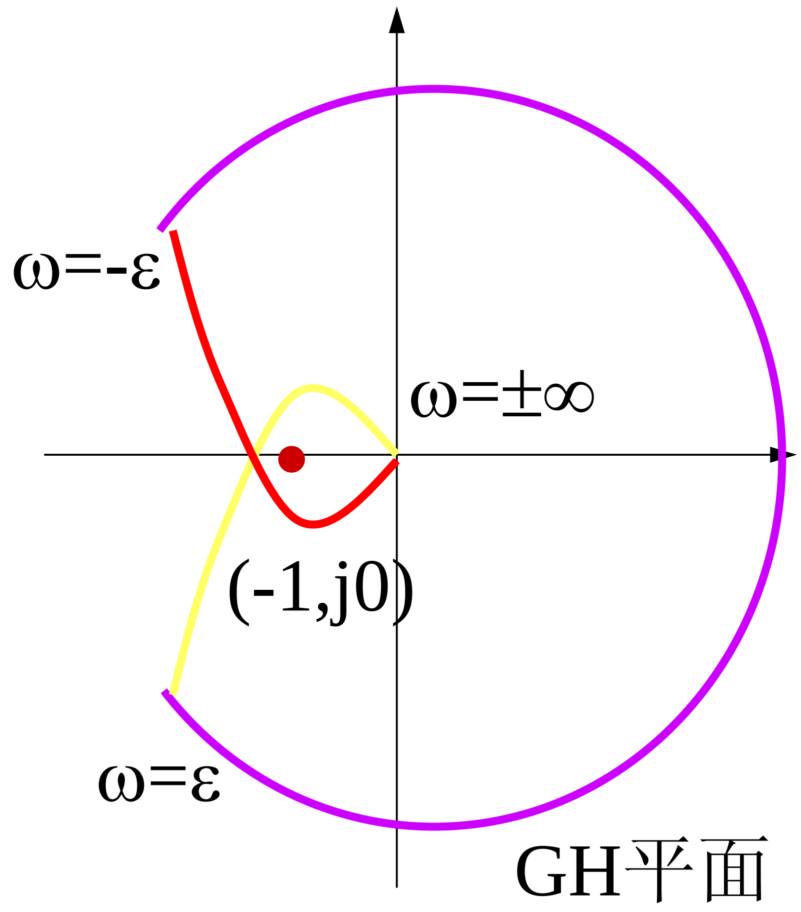
解：作奈氏曲线考虑增补

当(ω:$-\infty\to\infty$)顺时针

包围(–1,j0)点2次，

N=2 P=0

Z=2 不稳定



例：$G(s)H(s)=\dfrac{(s+0.2)(s+0.3)}{s^2(s+0.1)(s+1)(s+2)}$

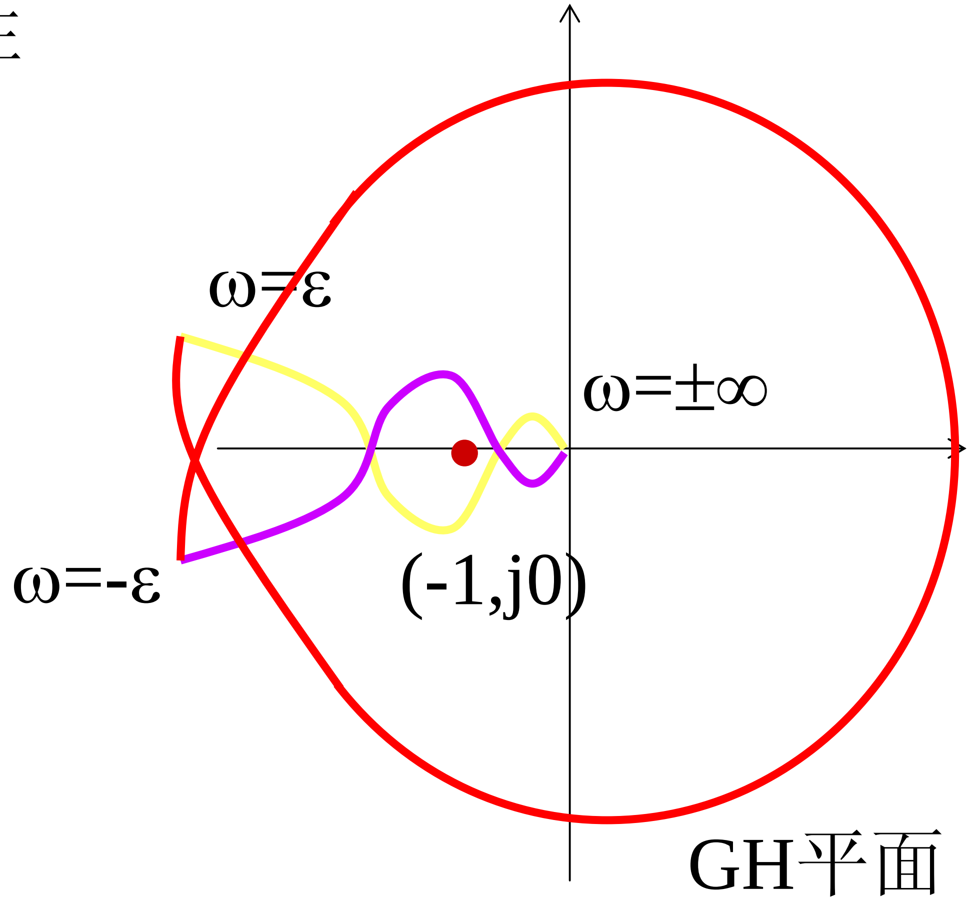
试判定闭环系统稳定性

解：作增补奈氏曲线

$N=0$，不包围(–1, j0)点

$P=0$，$Z=N\text{-}P=0$

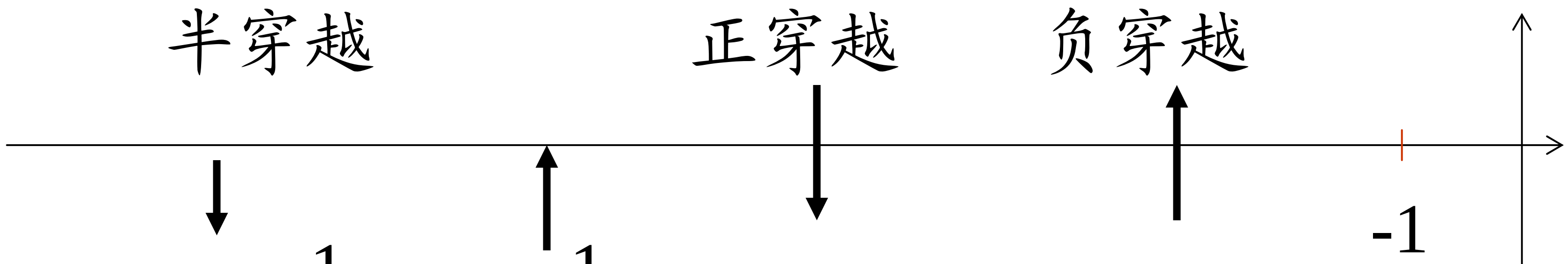
∴ 闭环稳定



补充：实用奈氏判据

若开环系统有q个 极点位于s右半平面，则当$(\omega:0\to\infty)$时，穿越$[-\infty,-1]$段的次数$N=\dfrac{q}{2}$，则闭环稳定，否则不稳定。（化数包围圈数为穿越次数）

穿越次数的计算按下定义：



记法：$N_i^+=\dfrac{1}{2}$ $N_i^-=\dfrac{1}{2}$ $N_i^+=1$ $N_i^-=1$

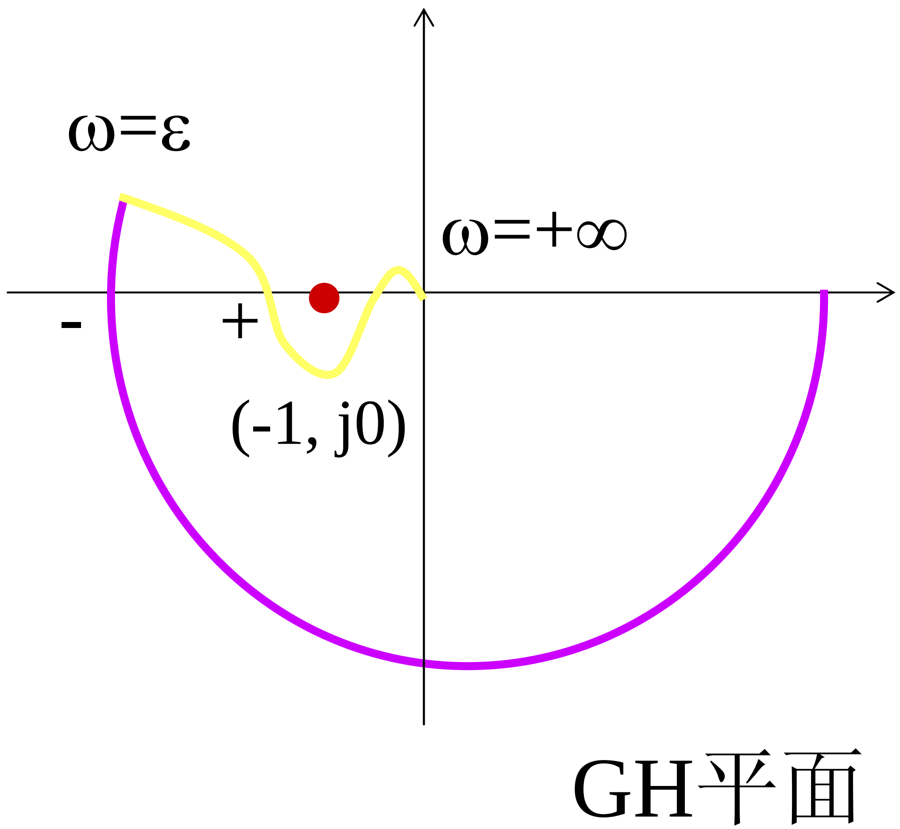
统计：$N=\sum N_i^+ + \sum N_i^-$

例：$G(s)H(s)=\dfrac{(s+0.2)(s+0.3)}{s^2(s+0.1)(s+1)(s+2)}$

解：$N^+=1 \quad N^-=1 \quad N=1-1=0 \quad q=0$

$$N=\frac{q}{2}=0$$

∴稳定



四.奈氏判据的应用问题

1.最小相位系统的稳定性判别

最小相位系统——右半s平面无开环极点。

最小相位系统又称开环稳定系统。

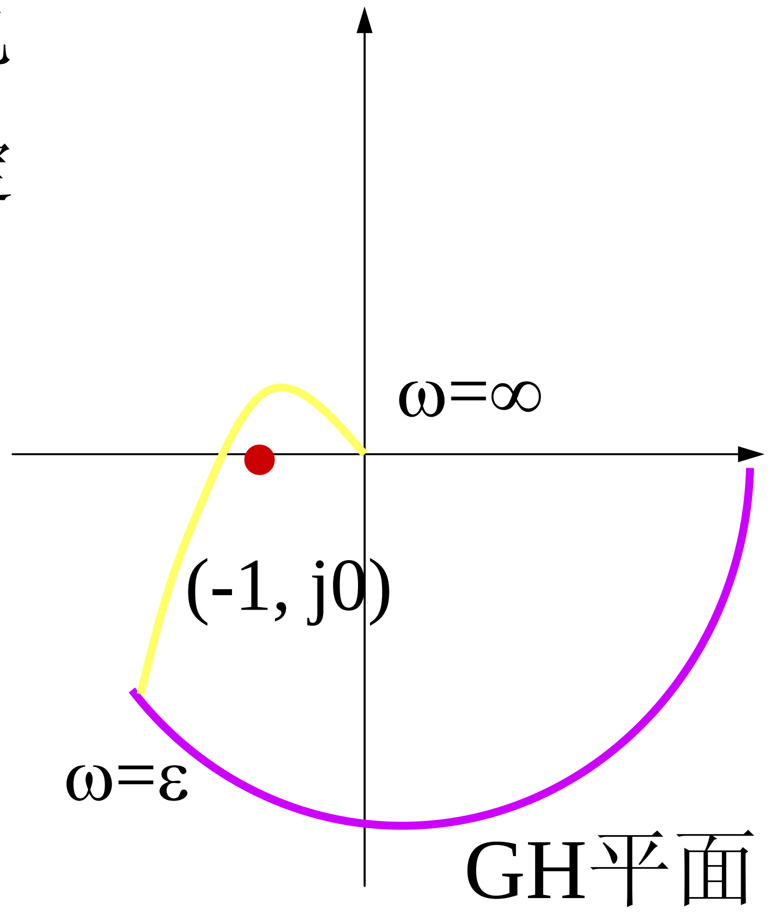
奈氏判据应用于最小相位系统时

$P=0 \quad \therefore Z=P-N=0-N \quad N=0$才有稳定

$\therefore$只需判断奈氏曲线是否包围(–1, j0)点，包围则不稳定，不包围则稳定。

例6-5： $G(s)H(s)=\dfrac{10}{s(s+1)(s+2)}$

因奈氏曲线包围(-1, j0)点可判定系统不稳。

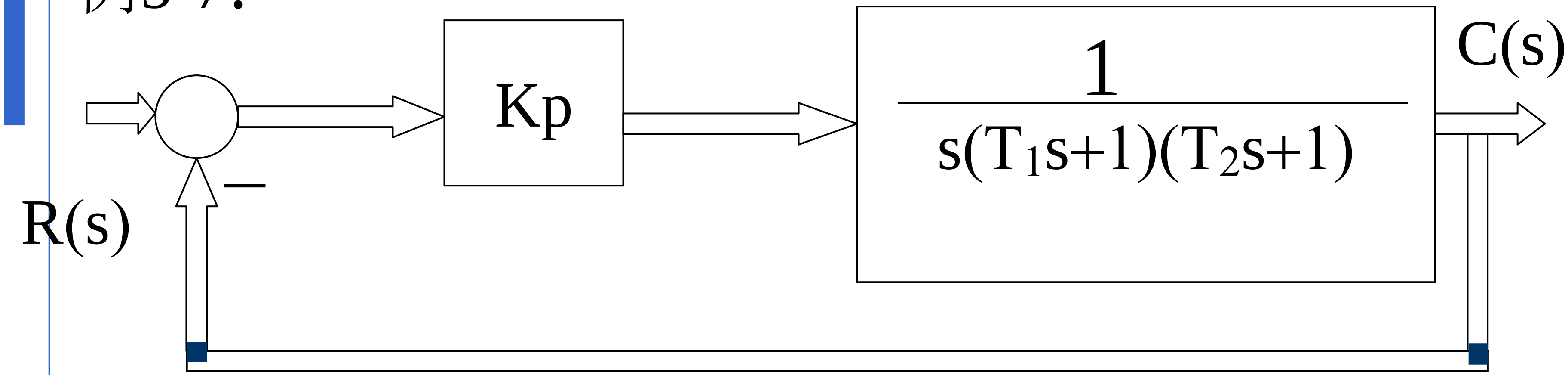


2. 利用奈氏判据确定稳定系统的可变参数取值范围

（象劳斯判据一样）

利用奈氏曲线穿过(–1, j0)点来确定。

例5-7：



求K_p的取值范围（$K_p>0$）

解：$$G(s)H(s)=\frac{K_p}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K_p}{j\omega(T_1j\omega+1)(T_2j\omega+1)}$$

$$=\frac{K_pj(1-T_1j\omega)(1-T_2j\omega)}{-\omega(T_1^2\omega^2+1)(T_2^2\omega^2+1)}$$

$$=\frac{K_pj\left[1-(T_1+T_2)j\omega-T_1T_2\omega^2\right]}{-\omega(T_1^2\omega^2+1)(T_2^2\omega^2+1)}$$

$$=\frac{-K_p(T_1+T_2)}{(T_1^2\omega^2+1)(T_2^2\omega^2+1)}-\frac{K_p(1-T_1T_2\omega^2)j}{\omega(T_1^2\omega^2+1)(T_2^2\omega^2+1)}$$

令$R(\omega)=-1, \ I(\omega)=0$

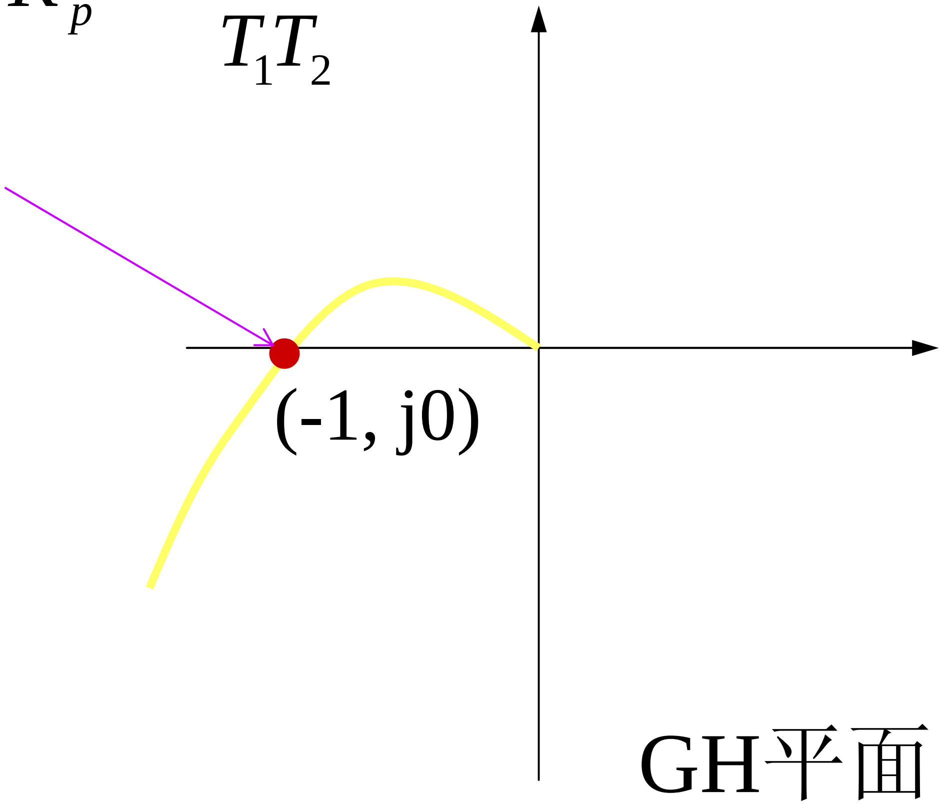
$$\frac{-K_p(T_1+T_2)}{(T_1^2\omega^2+1)(T_2^2\omega^2+1)}=-1 \quad K_p=\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$$

$$1-T_1T_2\omega^2=0 \qquad \omega=\sqrt{\frac{1}{T_1T_2}}$$

$\therefore$据奈氏判据，稳定的K_p：

$$0<K_p<\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$$

$$K_p = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$$



3. 具有迟延环节的系统稳定性分析

设：$G(s)H(s)=G_1(s)H_1(s)e^{-\tau s}$

$$G(j\omega)H(j\omega)=G_1(j\omega)H_1(j\omega)e^{-j\tau\omega}$$

$$|G(j\omega)H(j\omega)|=|G_1(j\omega)H_1(j\omega)| \qquad \text{模相等}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega)=\angle G_1(j\omega)H_1(j\omega)-\tau\omega$$

$\therefore$ $G(j\omega)H(j\omega)$ 的相角等于$G_1(j\omega)H_1(j\omega)$ 的相角减去 $\tau\omega$ 或者说顺时针转动$\tau\omega$ 。可先作出$G_1(j\omega)H_1(j\omega)$的奈氏曲线，再选若干点ω，顺时针转动$\tau\omega$ 得到$G(j\omega)H(j\omega)$。

注：ω 值越大则转动角度 $\tau\omega$ 越大。

例5-8：$G(s)H(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}e^{-\tau s}$

求：τ=0,2,4时的奈氏曲线。

解：绘制τ=0,2,4时的奈氏曲线。

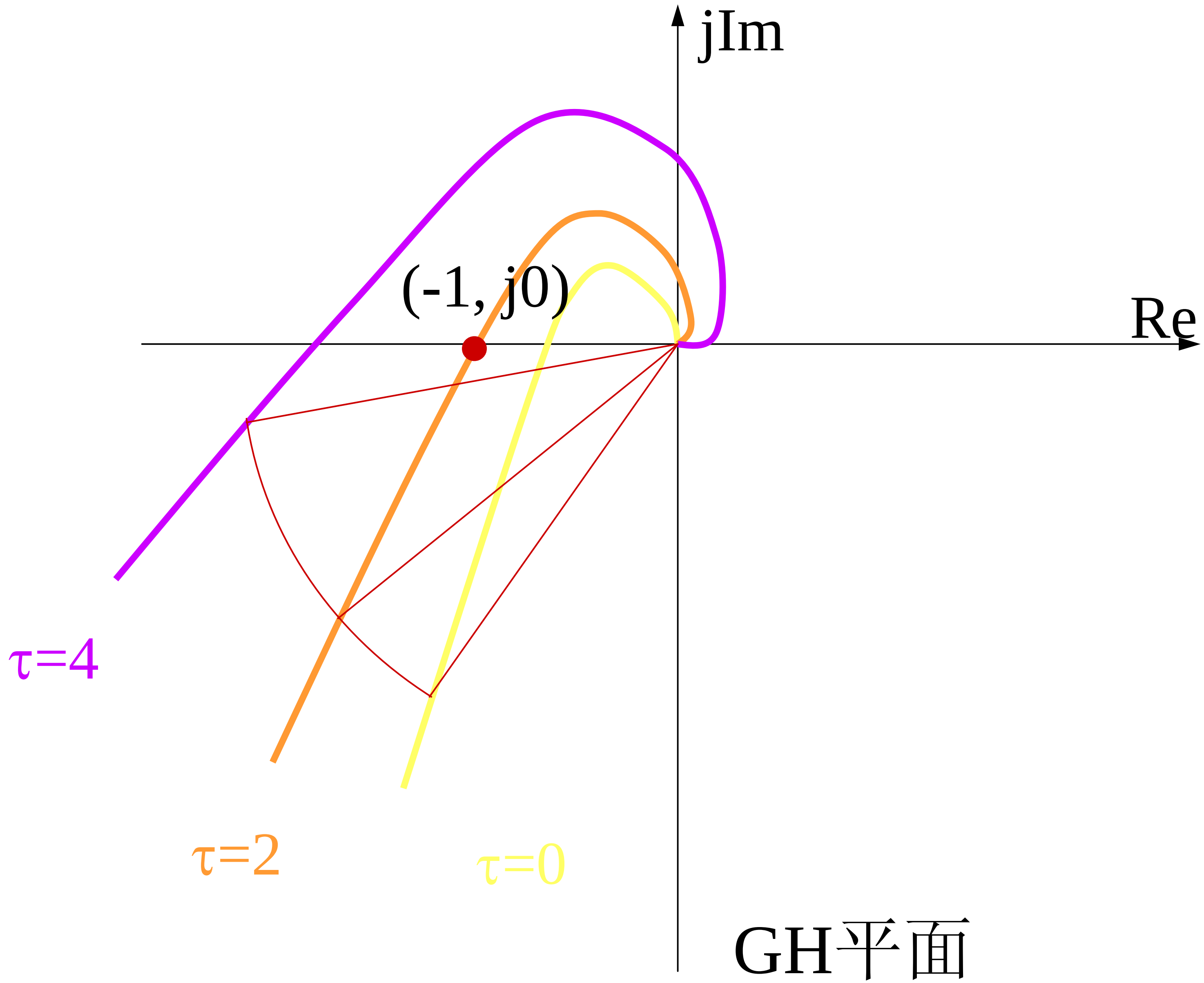
分析：

当τ=0，奈氏曲线不包围(–1, j0)点，∴稳定；

当τ=2，奈氏曲线穿过(–1, j0)点，∴临界稳定；

当τ=4，奈氏曲线包围(–1, j0)点，∴不稳定。

可见τ越大，系统变化越不易稳定。


jIm
Re
(-1, j0)
τ=4
τ=2
τ=0
GH平面

五.广义频率特性及其应用

奈氏轨迹包围了整个s右半平面，所以可用奈氏曲线判系统的绝对稳定性，若将奈氏轨迹包围的区域扩大，则可用来判别系统的相对稳定性。

广义奈氏轨迹：

BOA折线及半径∞的右半圆弧

广义奈氏曲线：

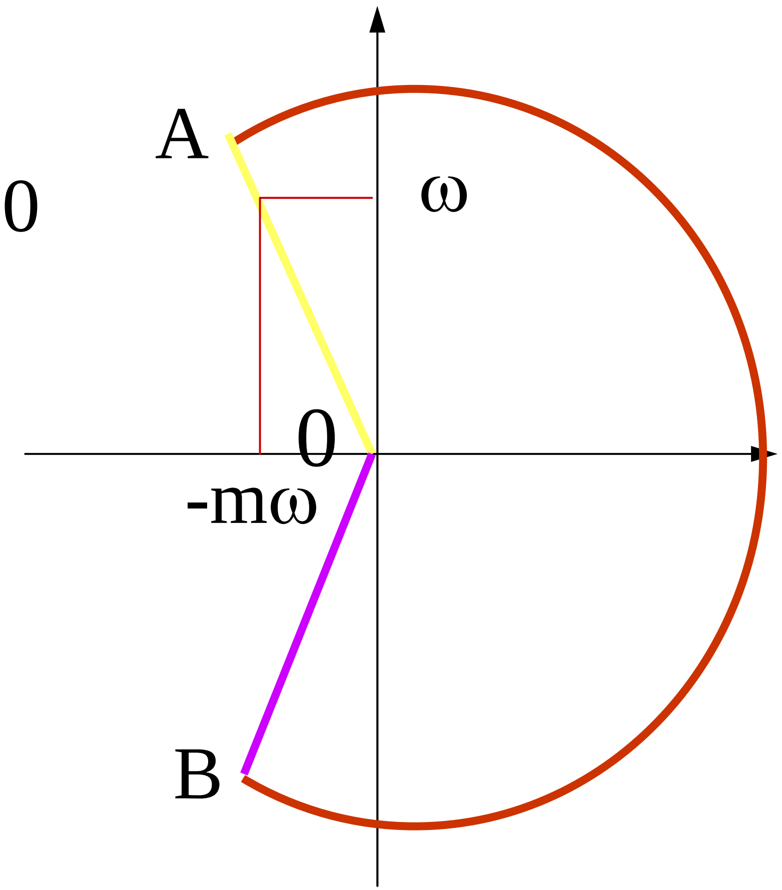
广义奈氏轨迹在GH平面的映射

OA：$s = m\omega + j\omega \quad 0 \le \omega < \infty$

OB：$s = -m\omega - j\omega \quad -\infty < \omega < 0$

$$m = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

衰减指数



广义奈氏轨迹

广义频率特性：

$G(-m\omega \pm j\omega)H(-m\omega \pm j\omega)$

简记为$G(m, j\omega)H(m, j\omega)$

广义奈氏判据：

若$G(s)H(s)$ 有**P**个极点位于**s**平面上具有给定的**m**值的射线右侧，而对应的GH平面上的广义频率特性曲线$G(m,j\omega)H(m,j\omega)$在ω从$-\infty\to\infty$变化时，逆时针包围$(-1, j0)$点的次数为**N**，则当$N=P$时，闭环任一点衰减指数都大于给定的**m**值，如果$P=0$，而曲线$G(j\omega)H(j\omega)$恰好通过$(-1, j0)$点，则闭环系统有一对复极点的衰减指数m_k恰好等于给定的**m**值。

例： $G(s)H(s)=\dfrac{K}{T_a s}e^{-\tau s}$

设T_a和τ已知，求使闭环有$m=0.221$的K值。

解: $G(-m\omega+j\omega)H(-m\omega+j\omega)=\dfrac{Ke^{-(-m\omega+j\omega)\tau}}{T_a(-m\omega+j\omega)}$

$$=\frac{Ke^{m\omega\tau}}{T_a\omega\sqrt{1+m^2}}e^{-j\left(\pi-arctg\frac{1}{m}+\omega\tau\right)}$$

令通过（-1, j0）点，有

$$\frac{Ke^{m\omega\tau}}{T_a\omega\sqrt{1+m^2}}=1$$

$$\pi - arctg\frac{1}{m} + \omega\tau = \pi$$

$$\omega\tau = arctg\frac{1}{m} = arctg\frac{1}{0.221} = 1.35$$

$$K = \frac{T_a\omega\sqrt{1+m^2}}{e^{m\omega\tau}} = \frac{T_a\sqrt{1+(0.221)^2}}{e^{0.221\times 1.35}} \cdot \frac{1.35}{\tau} = 1.0259\frac{T_a}{\tau}$$

第六节　控制系统的伯德图分析

一.　控制系统相对稳定性及其判别

劳斯判别，奈氏判据只能判别系统的绝对稳定性，实际中需要知道稳定的深 度 —相对稳定性。

一般要求系统不但绝对稳定而且有一定的稳定裕量。

稳定裕量常用 $\begin{cases}\text{相位稳定裕量} \\ \text{增益稳定裕量}\end{cases}$ 表达

用奈氏图和伯德图均可看出两种裕量，Bode图更直观
。

相位裕量—Phase Margin (PM)

$$PM=\gamma=\phi(\omega_c)-(-180^\circ)=180^\circ+\phi(\omega_c)$$

ω_c — 剪切频率，截止频率，增益穿越频率。

奈氏图中与单位圆$|GH|=1$的交点

伯德图中与$L(\omega)=0$的交点

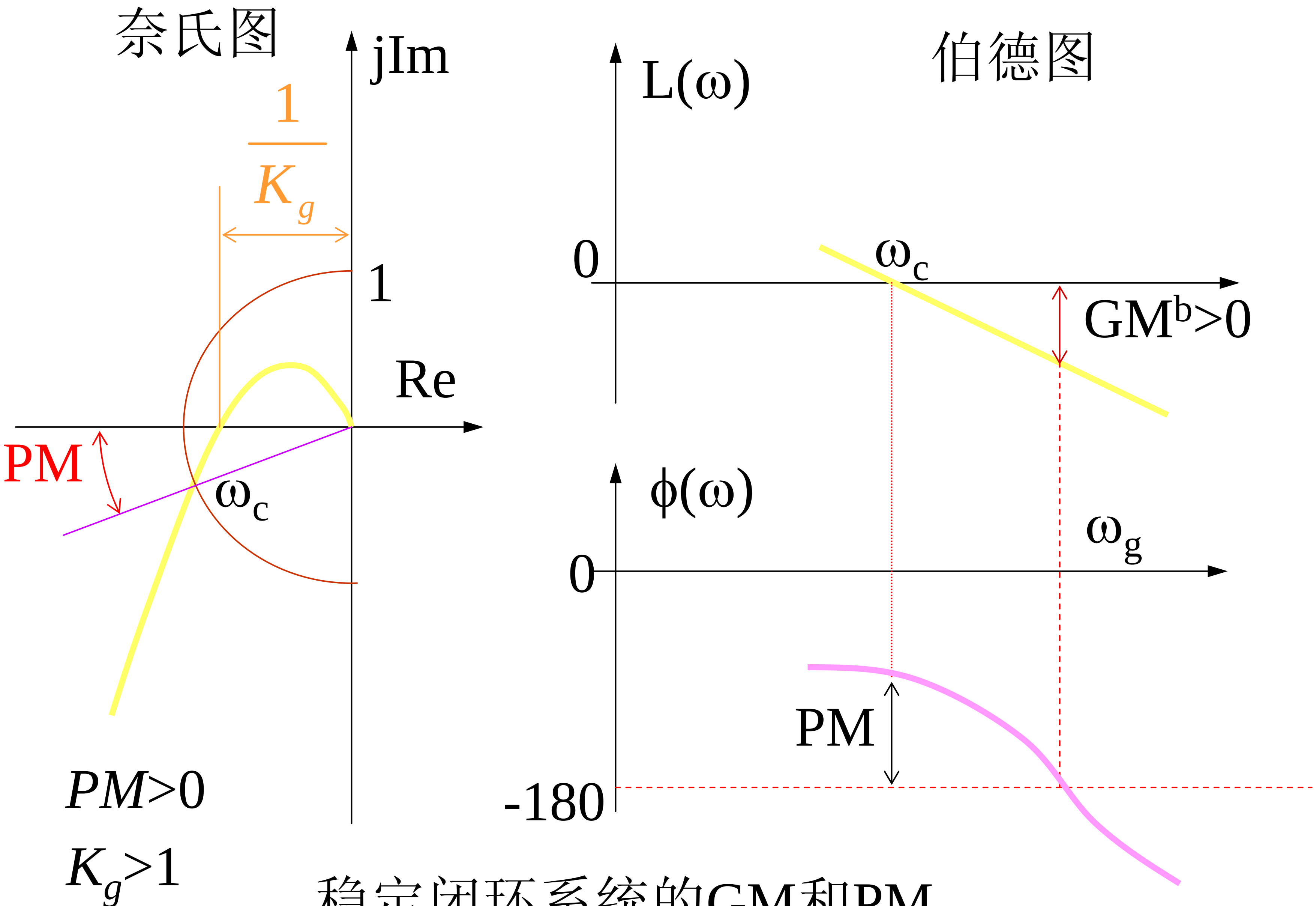
增益裕量—Gain Margin(GM)

$$GM=K_g=\frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|}$$

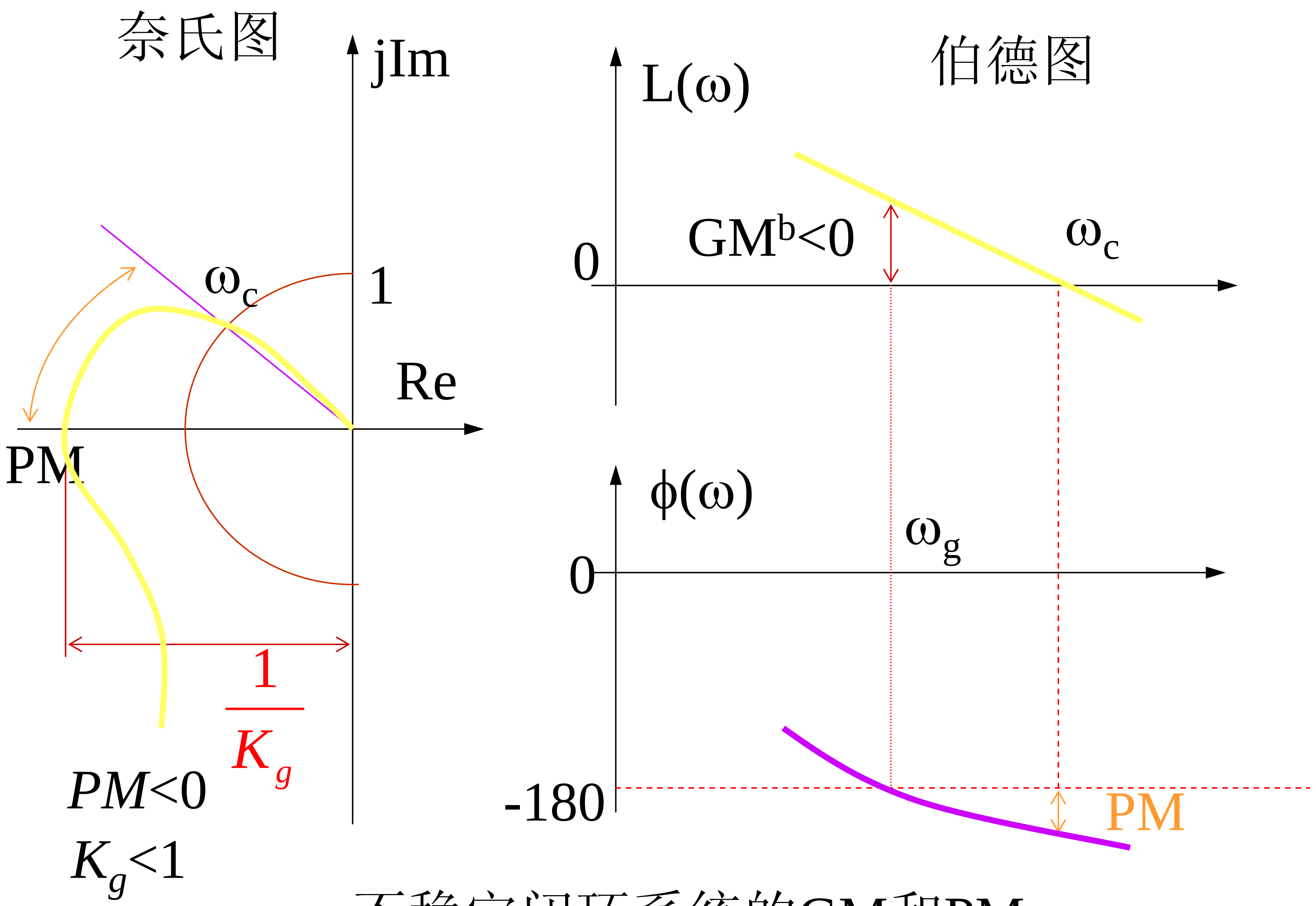
$$GM^b=-20\lg|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|=K_g^b$$

ω_g ——相位穿越频率

$$\phi(\omega_g)=|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|=-180^\circ$$



稳定闭环系统的GM和PM



不稳定闭环系统的GM和PM

GM，*PM*常作为控制系统的频域设计指标。

GM，*PM*大表明相对稳定性好,但响应速度低。

GM，*PM*小表明相对稳定性差,但响应速度高。

过大或过小都不好，较好的经验值为：

$$PM = 30^\circ —— 60^\circ$$

$$GM = K_g^b \geq 6(db)$$

*GM*和*PM*分别定义，所以两者间无固定的比例关系，*PM*大未必*GM*大，*PM*小未必 *GM*小，有时恒有*GM*=∞，如有些惯性环节；有时没有*PM*值，如迟延环节。

二。相位裕量与时域指标的关系

用Bode图分析控制系统时，常利用γ和ω_c。ω_c大，系统频带宽，惯性小，响应快，调整时间短。γ和ζ有一一对应关系，故也与超调量M_p成反比关系。

γ: 30°—70°　　ζ: 0.3—0.8

分析标准二阶系统：$G(j\omega)H(j\omega)=\dfrac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega+2\zeta\omega_n)}$

当$\omega=\omega_c$时　$\left|G(j\omega_c)H(j\omega_c)\right|=\dfrac{\omega_n}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2+(2\zeta\omega_n)^2}}=1$

求得　$\omega_c=\omega_n\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}$

推导： $$\omega_n^2 = \omega_c\sqrt{\omega_c^2 + (2\zeta\omega_n)^2}$$

$$\omega_n^4 = \omega_c^2\left(\omega_c^2 + (2\zeta\omega_n)^2\right) = \omega_c^4 + 4\omega_c^2\zeta^2\omega_n^4$$

$$\omega_c^4 + 4\omega_c^2\zeta^2\omega_n^4 - \omega_n^4 = 0$$

$$X = \omega_c^2 \qquad X^2 + 4X\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^4 = 0$$

$$X = -4\zeta^2\omega_n^2 \pm \frac{\sqrt{(4\zeta^2\omega_n^2)^2 + 4\omega_n^4}}{2}$$

$$= -2\zeta^2\omega_n^2 \pm \omega_n^2\sqrt{4\zeta^4 + 1}$$

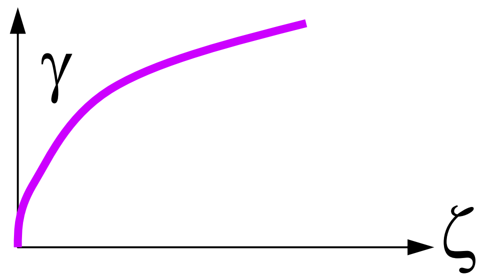
$$= \omega_n^2\left(\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2\right)$$

$$\omega_c = \omega_n\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}$$

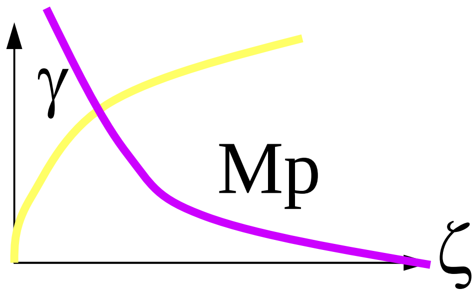
$$\phi(\omega_c) = -90^\circ - tg^{-1}\frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n}$$

$$\gamma(\omega_c) = 180^\circ + \phi(\omega_c) = 90^\circ - tg^{-1}\frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n}$$

$$= tg^{-1}\frac{2\zeta\omega_n}{\omega_{cn}} = tg^{-1}\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}}$$



可见γ—ζ关系成正比。参见图示。



由于$M_p = e^{\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$，所以$M_P$与$\gamma$成反比关系。参见图示。

由于 $t_s(\Delta = 5\%) = \dfrac{3}{\zeta\omega_n}$

$$t_s(\Delta = 2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

代入$\omega_n = \dfrac{\omega_c}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}}$则有

$$t_s\omega_c = \frac{3}{\zeta}\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2} \quad \Delta = 5\%$$

$$t_s\omega_c = \frac{4}{\zeta}\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2} \quad \Delta = 2\%$$

$$\because tg\gamma = \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}$$

$$\therefore \quad t_s\omega_c = \frac{6}{tg\gamma} \quad \Delta = 5\%$$

$$t_s\omega_c = \frac{8}{tg\gamma} \quad \Delta = 2\%$$

t_s与γ间的关系见图。可见当ω_c不变时t_s与γ成反比。

三.伯德图与系统稳态误差的关系

如前所述，系统稳态误差和系统稳态误差系数与系统类型和开环增益有关。这里将说明，由伯德图幅频特性中的低频渐近线特征可直接看出系统类型和稳态误差系数。参见表5-2。

表5-2 系统类型和低频渐近线特征

系统类型	斜率	L(ω=1)	与L=0的交点
0	0	$20\lg K_p$	无交点
1	-20	$20\lg K_v$	K_v
2	-40	$20\lg K_a$	$\sqrt{K_a}$

验证：设$G(s)H(s)=\dfrac{K}{s^N(Ts+1)}$

(1) N=0 (0型系统)

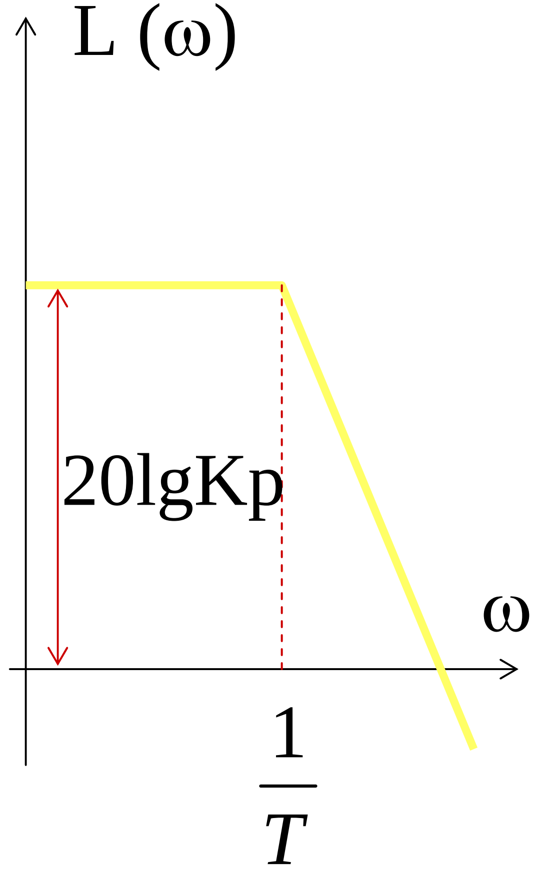
$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K}{Tj\omega+1}$$

$$L(\omega)=20\lg K-20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

ω→0时有低频渐近线方程

$$L(\omega)=20\lg K=20\lg K_p$$

斜率=0， 与实轴无交点。



(2) N=1　(1型系统)

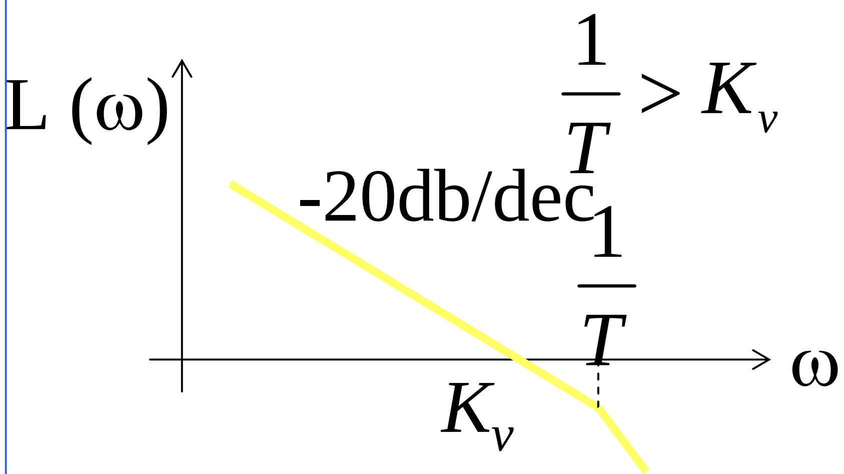
$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K}{j\omega(Tj\omega+1)}$$

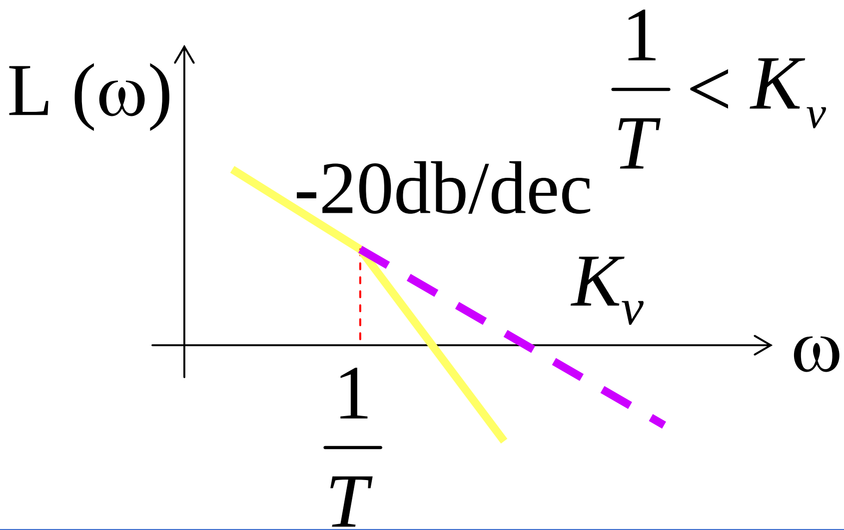
$$L(\omega)=20\lg K-20\lg\omega-20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

ω→0时有低频渐近线方程

$$L(\omega)=20\lg K-20\lg\omega=20\lg K_v-20\lg\omega$$

斜率=-20 db/dec，交点: ω=K_v





(2) N=2　(2型系统)

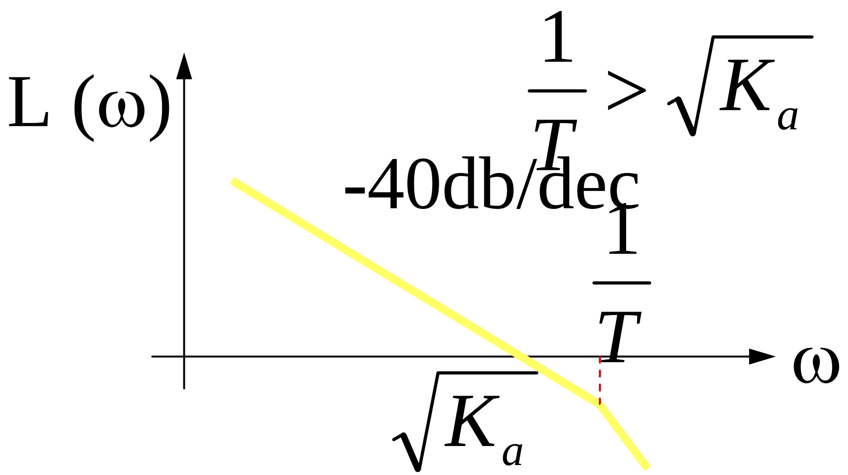
$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K}{(j\omega)^2(Tj\omega+1)}$$

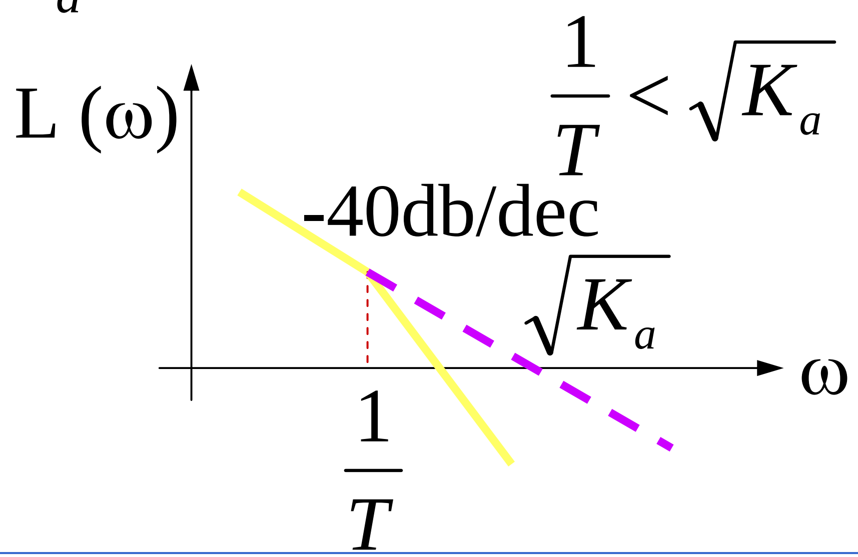
$$L(\omega)=20\lg K-40\lg\omega-20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

ω→0时有低频渐近线方程

$$L(\omega)=20\lg K-40\lg\omega=20\lg K_a-40\lg\omega$$

斜率=-20 db/dec，交点: $\omega=K_a$





关于伯德图低频渐近线的小结：

$$系统类型N=\frac{|渐近线斜率|}{20}$$

$$稳态误差系数(开环增益K)=10^{\frac{L(1)}{20}}$$

第七节　闭环系统频率特性分析

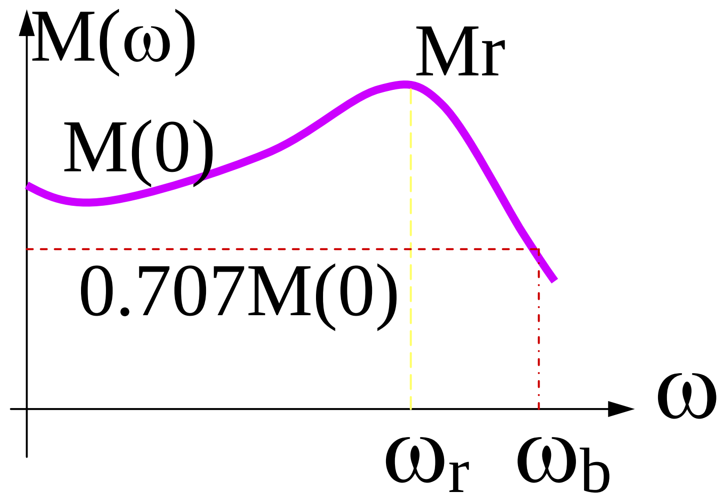
- 一. 闭环频率特性与时域响应特性的关系
- 二. 闭环频率特性的求取
- 三. 等M圆
- 四. 等N圆(等α圆)
- 五. 利用等M圆和等N圆求闭环频率特性
- 六. 对数幅相图
- 七. 尼科尔斯(Nichols)图

一. 闭环频率特性与时域响应特性的关系

1. 闭环频率特性的性能指标

(1) 谐振频率ω_r和谐振峰值M_r

(2) 截止频率和频带宽度ω_b



当$L(\omega)-L(0)=3db$，

$M(\omega)-M(0)=0.707M(0)$时的ω值定义为截止频率和频带宽度ω_b

一般，M_r不希望大，大则不稳，振荡剧烈。ω_b希望大，大则响应快。

2. 闭环频率特性指标与时域性能指标的关系

(1)M_r和M_p

据第四节有 $M_r = \dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ $0<\zeta\le 0.707$，则

$$\zeta = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\dfrac{1}{M_r^2}}}{2}}$$

又知 $M_p = \exp\left(\dfrac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\times 100\%$

所以

$$M_p = \exp\left(-\pi\sqrt{\frac{M_r-\sqrt{M_r^2-1}}{M_r+\sqrt{M_r^2-1}}}\right)\times 100\%$$

M_r和M_p的关系成正比，见下页图。

M_r：1.2——1.5

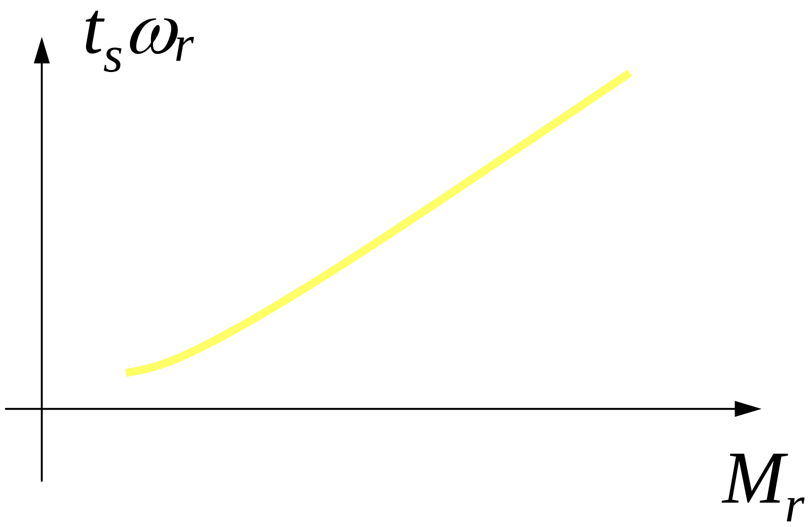
M_p：20%——30%

(2) M_r和t_s的关系

已知

$$t_s = \begin{cases} \dfrac{3}{\zeta\omega_n} & \Delta = 5\% \\ \dfrac{4}{\zeta\omega_n} & \Delta = 2\% \end{cases}$$

根据 $\zeta = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-\dfrac{1}{M_r^2}}}{2}}$



得 $$t_s=\begin{cases}3\sqrt{\dfrac{2M_r}{M_r-\sqrt{M_r^2-1}}} & \Delta=5\% \\ 4\sqrt{\dfrac{2M_r}{M_r-\sqrt{M_r^2-1}}} & \Delta=2\%\end{cases}$$

又据$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$，得$t_s$、$\omega_r$与$M_r$的关系：

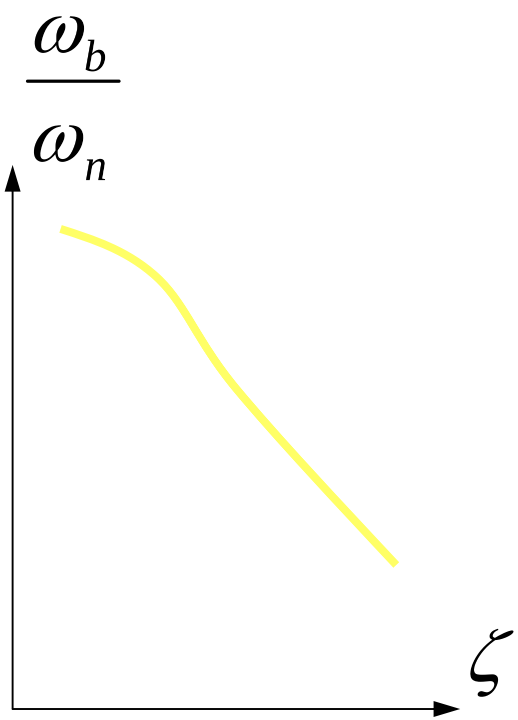
$$t_s\omega_r=\begin{cases}3\sqrt{\dfrac{2\sqrt{M_r^2-1}}{M_r-\sqrt{M_r^2-1}}} & \Delta=5\% \\ 4\sqrt{\dfrac{2\sqrt{M_r^2-1}}{M_r-\sqrt{M_r^2-1}}} & \Delta=2\%\end{cases}$$

(3) 频带宽度ω_b和ζ的关系

对于标准二阶系统，据

$$\left|\frac{\omega_n^2}{(j\omega_b)^2+2\zeta\omega_n j\omega_b+\omega_n^2}\right|=0.707$$

解得$\omega_b=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}$



ω_b与ζ成反比，频带越宽，阻尼越小。

二. 闭环频率特性的求取

1、已知闭环传函 $W(s)$，则 $W(j\omega)=W(s)|_{s=j\omega}$

2、已知开环传函 $G(s)$H(s)，则先求$W(s)$，再求$W(j\omega)$

$$W(s)=\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$$

限于单位反馈系统

$W(j\omega)=W(s)|_{s=j\omega}$

3、已知 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的奈氏图和伯德图，则可利用等M圆和等N圆图线推算出$W(j\omega)$。

4、已知 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的对数幅相图，则可利用尼科尔斯图线推算出$W(j\omega)$。

法1、2适用于系统数学模型已知的情况，法3、4适用于开环频率特性已知的情况， 法4比法3更常用。

三. 等M圆

设单位反馈系统的开环传函为$G(s)$, 则闭环传函

$$W(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}。$$

当$G(j\omega)=R(\omega)+jI(\omega)$, 有闭环频率特性函数

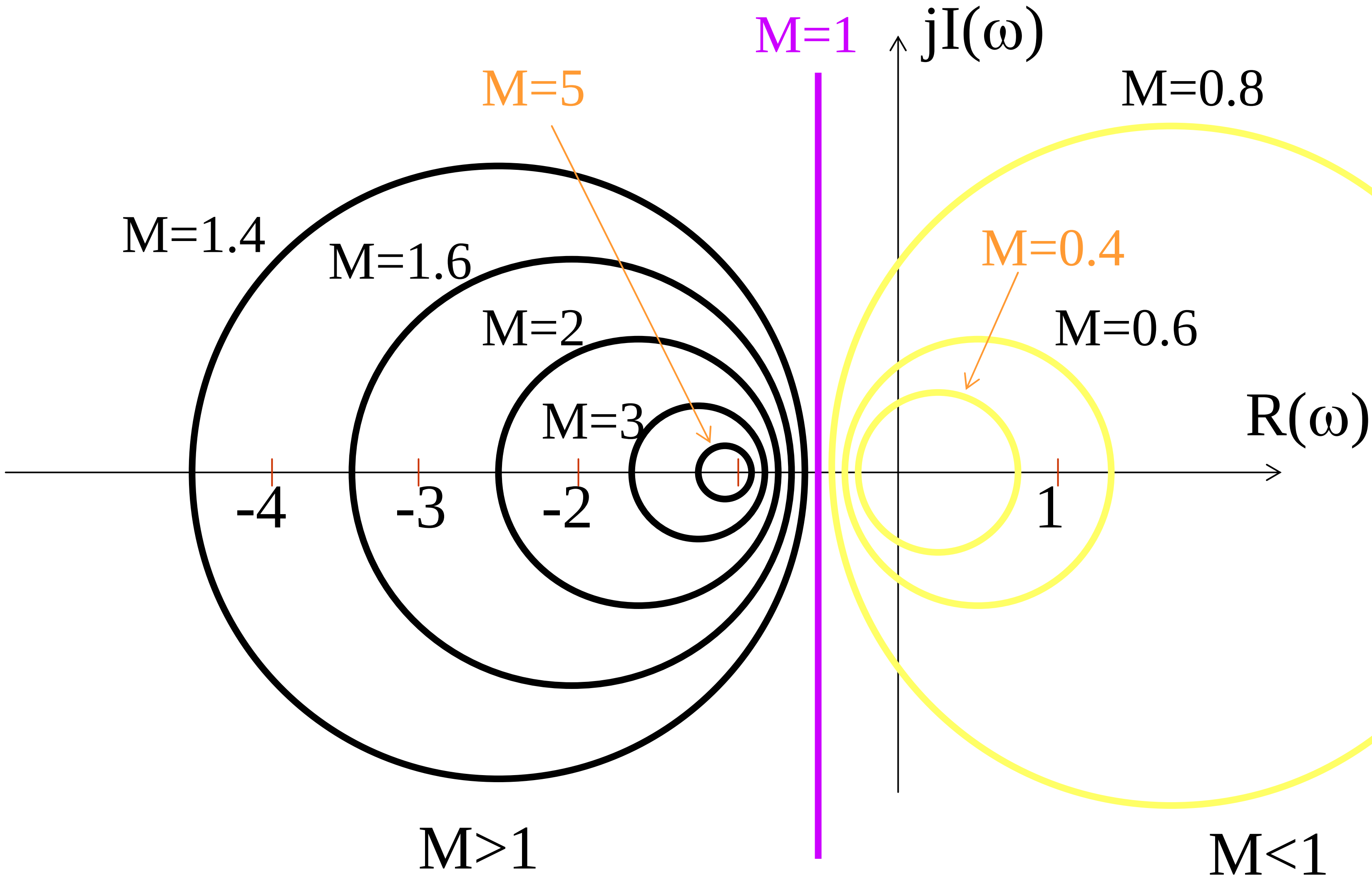
$$W(j\omega)=\frac{R(\omega)+jI(\omega)}{1+R(\omega)+jI(\omega)}=\frac{R+jI}{1+R+jI}$$

$$M(\omega)=\left|W(j\omega)\right|=\frac{\sqrt{R^2+I^2}}{\sqrt{(1+R)^2+I^2}}$$

或写成$M^2=\dfrac{R^2+I^2}{(1+R)^2+I^2}$,

经整理和配方可推得$\left(R+\dfrac{M^2}{M^2-1}\right)^2+I^2=\left(\dfrac{M^2}{M^2-1}\right)^2$

此式说明等M轨迹在$G(s)$平面形成圆簇。由图可见等M圆簇有两个，以R=-0.5为界，与实轴对称。从$G(j\omega)$曲线与等M圆簇线的交点可确定$W(j\omega)$的$M(\omega)$。



M→∞时，收敛于（-1，j0）

M→0时，收敛于原点

四．等N圆（等α圆）

闭环相频特性函数。

$$\alpha(\omega)=\angle W(j\omega)=\angle\frac{R+jI}{1+R+jI}=tg^{-1}\frac{I}{R}-tg^{-1}\frac{I}{1+R}$$

令$N=tg\alpha$，则

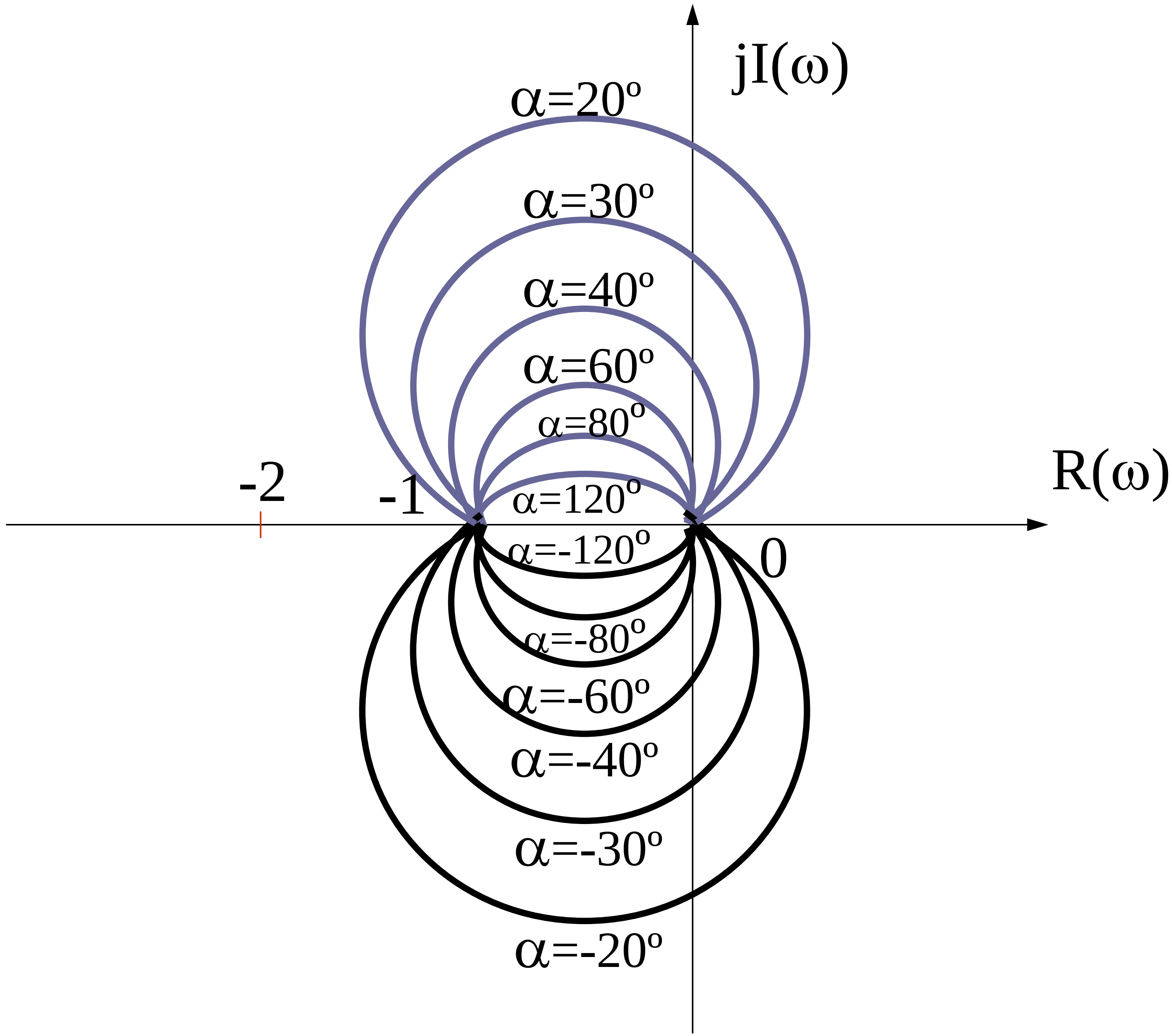
$$N=tg\left(tg^{-1}\frac{I}{R}-tg^{-1}\frac{I}{1+R}\right)$$

$$=\frac{I}{R^2+R+I^2}$$ (利用正切函数的差角公式)

$$R^2+R+I^2-\frac{1}{N}I=0$$

$$(R+0.5)^2+(I-\frac{1}{2N})^2=\frac{N^2+1}{4N^2}$$

此式说明等N轨迹在$G(s)$平面形成圆簇。由图可见等N圆均通过(-1, j0)和原点，其圆心在 $(0.5,\dfrac{0.2}{N})$，半径为$\sqrt{\dfrac{N^2+1}{4N^2}}$。从$G(j\omega)$曲线与等N圆簇线的交点可确定$W(j\omega)$的tg$\alpha(\omega)$，$\alpha=\{\alpha_{主值}\pm k180^{o}\}$，是多值函数。



jI(ω)
α=20°
α=30°
α=40°
α=60°
α=80°
α=120°
R(ω)
-2
-1
0
α=-120°
α=-80°
α=-60°
α=-40°
α=-30°
α=-20°

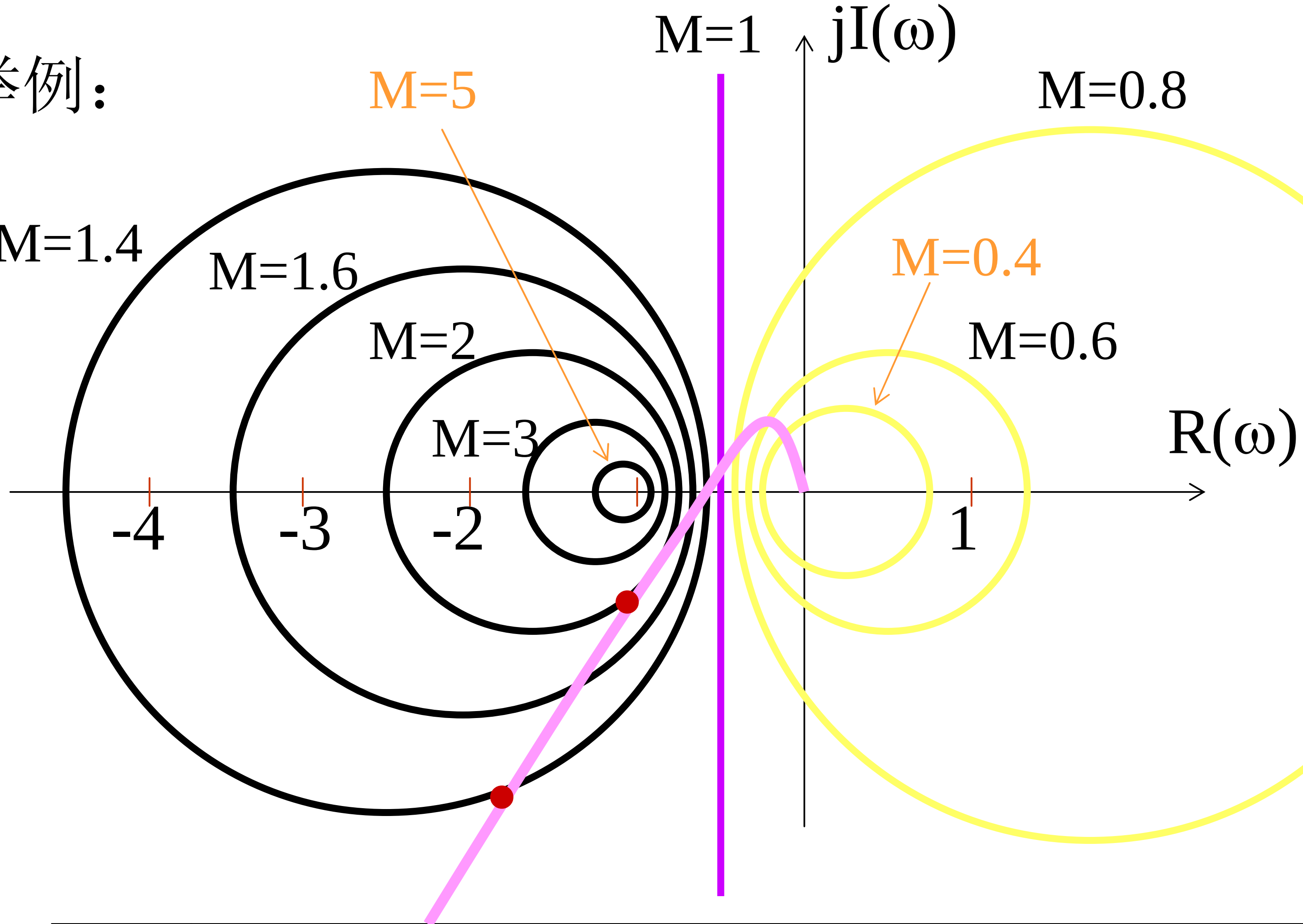
五. 利用等M圆和等N圆求闭环频率特性

- 对于单位反馈系统，可直接利用等M圆和等N圆由奈氏图$G(j\omega)$求闭环频率特性$W(j\omega)$。具体作法为：

1. 将$G(j\omega)$曲线叠加在等M圆线图上, 读取$G(j\omega)$与等M圆的交点数据$\{\omega_i, M(\omega_i), 1,2,3,\ldots L\}$
2. 将$G(j\omega)$曲线叠加在等N圆线图上, 读取$G(j\omega)$与等N圆的交点数据$\{\omega_i, \alpha(\omega_i), 1,2,3,\ldots L\}$

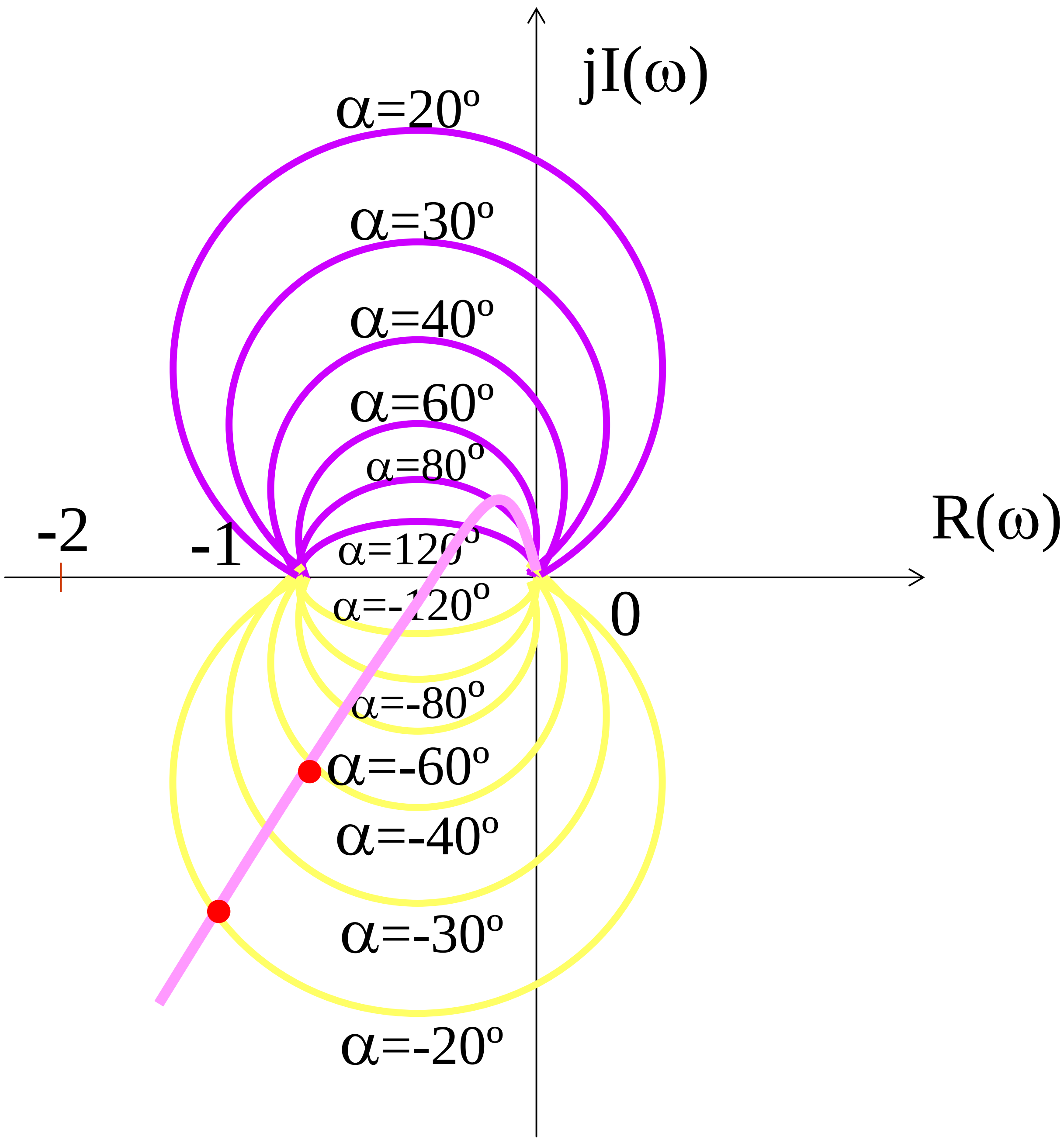
3. 据交点数据{ω_i, M(ω_i), 1,2,3,…L}，可做M——ω曲线；据交点数据{ω_i, $\alpha(\omega_i)$, 1,2,3,…L}，可做α——ω曲线。进而可综合为M——α曲线。

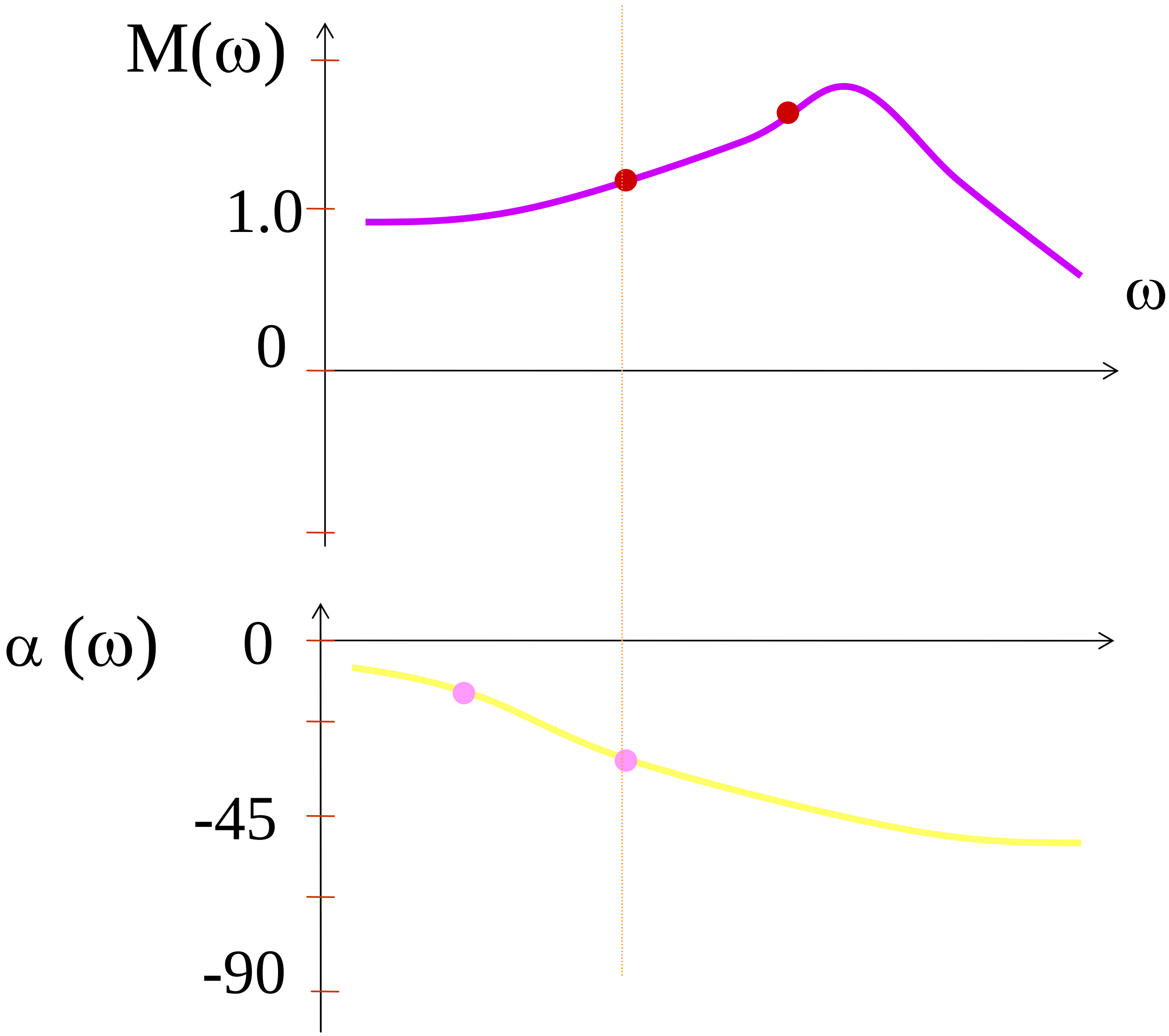
举例：



ω:	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
M:	1.1	1.2	1.4	2.0			

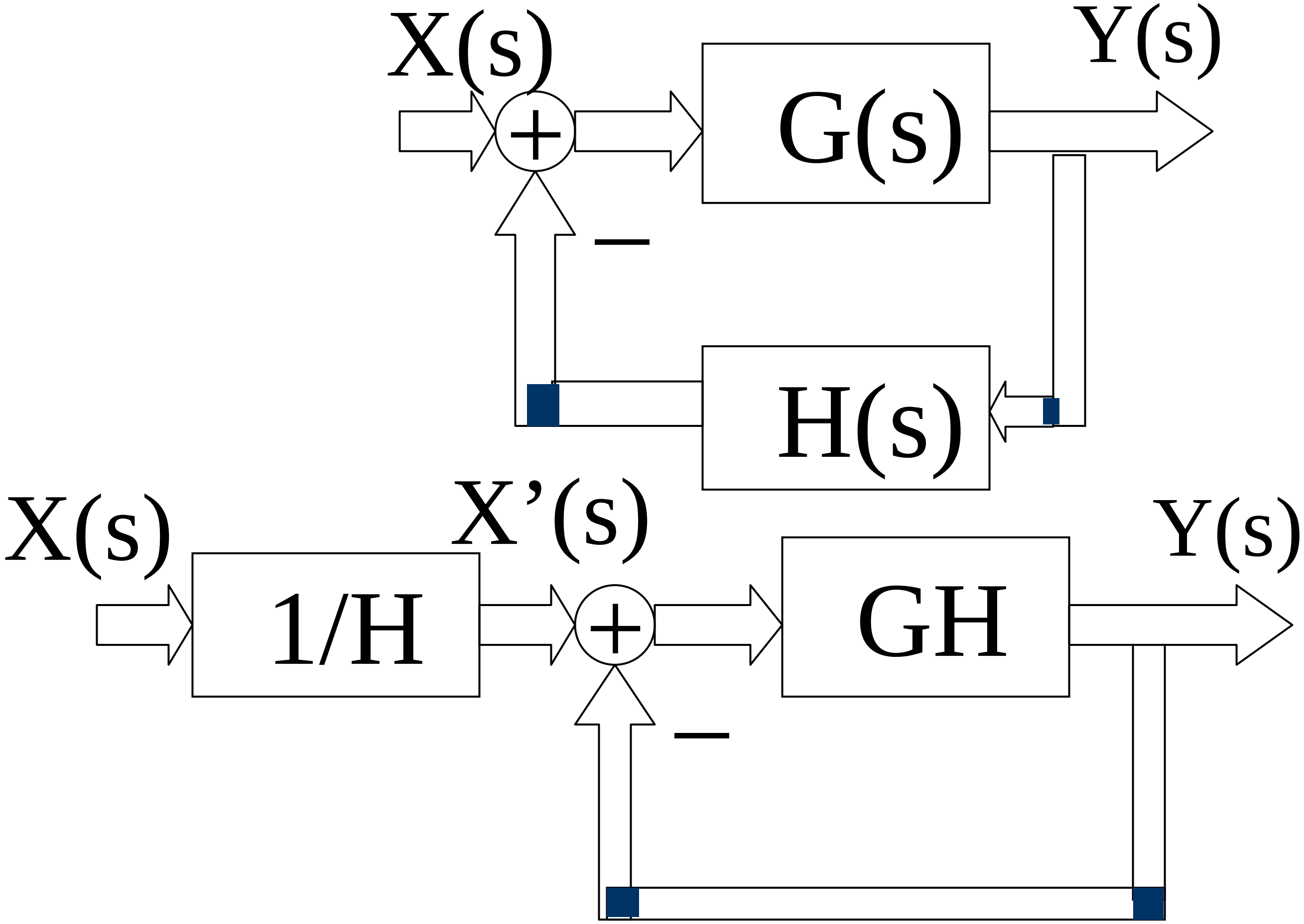
ω:	α:
ω_1	-10
ω_2	-20
ω_3	-40
ω_4	
ω_5	
ω_6	
ω_7	





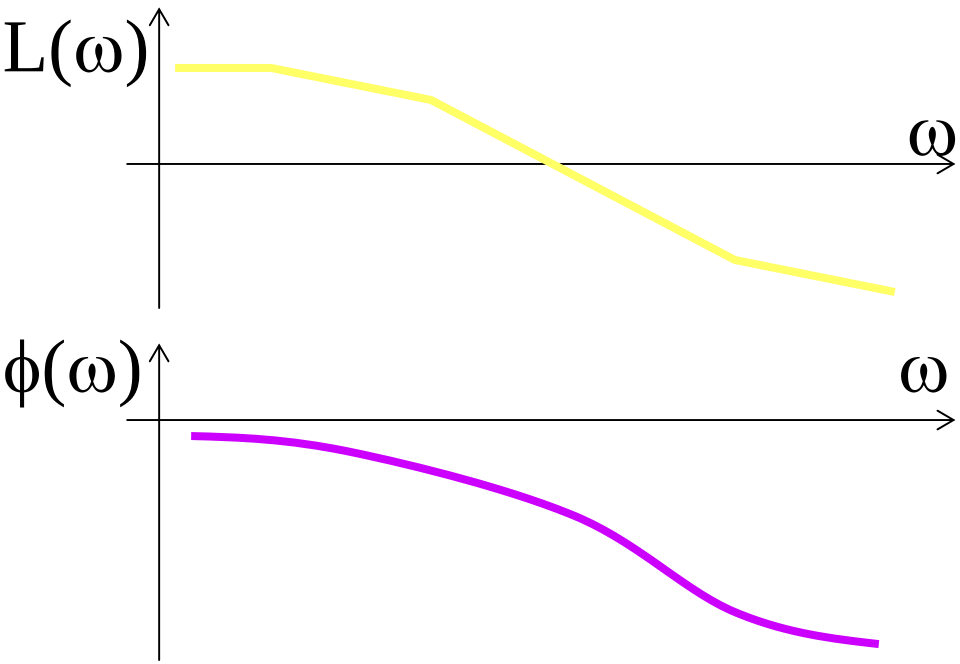
M(ω)
1.0
0
ω
α (ω)
0
-45
-90

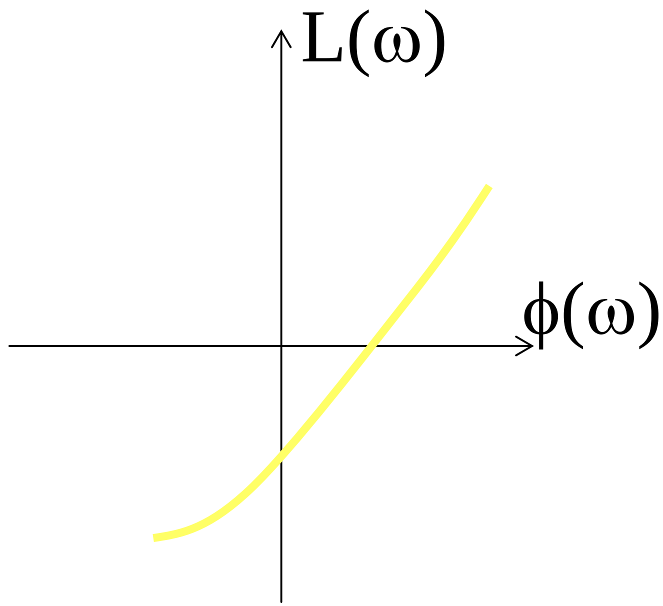
➢ 对于非单位反馈系统,可转化为单位反馈系统后再处理。转换后，先求$\frac{Y(s)}{X^{'}(s)}$，再乘$\frac{1}{H(s)}$求$\frac{Y(s)}{X(s)}$。



六、对数幅相图

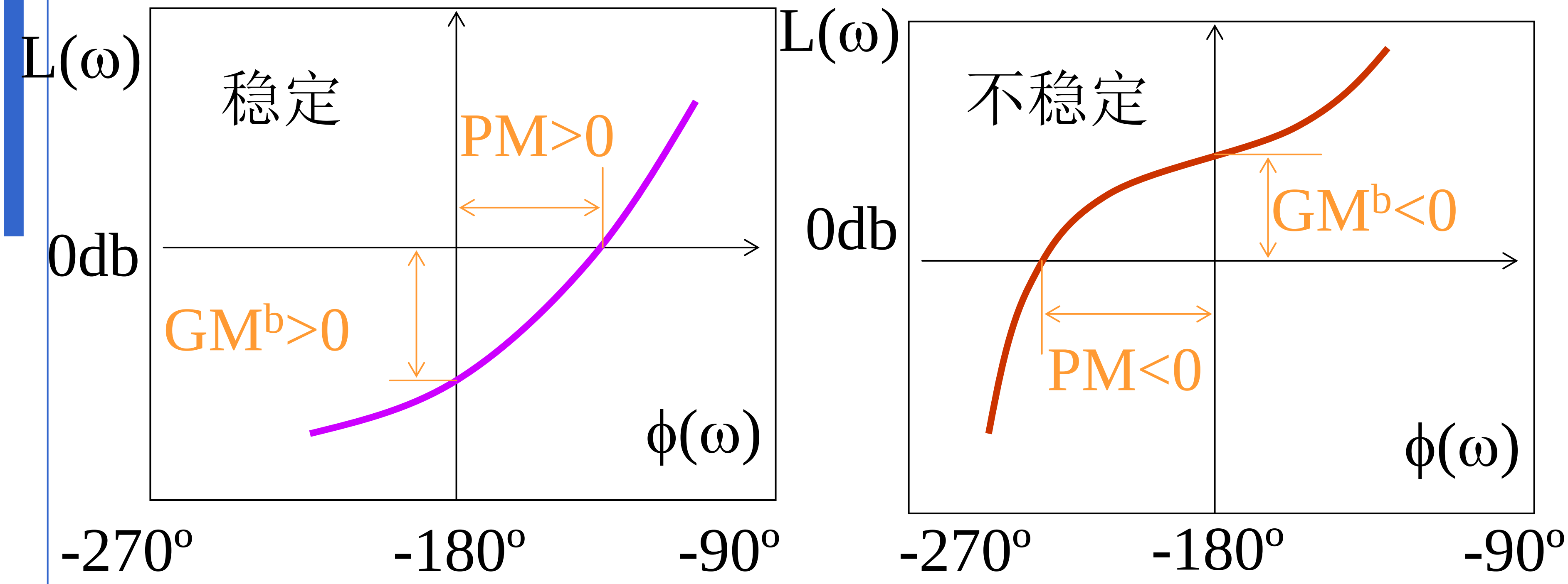
- 1) 以上等M圆和等N圆是做在奈氏图上，而用伯德图比用奈氏图更方便。显然将等M圆和等N圆做在伯德图上更好。但是实际常用的是*对数幅相图。*
- 2) 开环系统的对数幅相图可以看成是由伯德图的L--ω图和φ--ω图合并而成的L--φ图.





对数幅相图

- 3) 在对数幅相图上增益裕量和相位裕量被表示的更简单明了.增益裕量的大小就是对数幅相曲线与$\phi = -180^{o}$ 垂线的交点至L=0 水平线的距离,此交点低于L=0 则增益裕量为正;相位裕量的大小就是对数幅相曲线与L=0 水平线的交点至$\phi = -180^{o}$垂线的距离,此交点在$\phi = -180^{o}$垂线右侧则相位裕量为正.



L(ω)
稳定
PM>0
0db
GMb>0
ϕ(ω)
-270°
-180°
-90°
L(ω)
不稳定
GMb<0
0db
PM<0
ϕ(ω)
-270°
-180°
-90°

七. 尼科尔斯(Nichols)图

1、 尼科尔斯(Nichols)图的概念

- 将奈氏图中的等M图和等N图变换到对数幅相图则得到尼科尔斯图
- 等M圆的变换：

设$R = A\cos\varphi$，$I = A\sin\varphi$，代入等M圆方程：

$$\left(A\cos\varphi + \frac{M^2}{M^2-1}\right)^2 + (A\sin\varphi)^2 = \left(\frac{M^2}{M^2-1}\right)^2$$

整理得：$A^2 + 2A\frac{M^2}{M^2-1}\cos\varphi + \frac{M^2}{M^2-1} = 0$

求解得：

$$A=-\frac{M^2}{M^2-1}\cos\varphi\pm\sqrt{\left(\frac{M^2}{M^2-1}\right)^2\cos^2\varphi-\frac{M^2}{M^2-1}}$$

最后得M圆在对数幅相图上的规迹方程

$$L(\omega)=20\lg A$$

$$=20\lg\left[\frac{-M^2}{M^2-1}\cos\varphi\pm\sqrt{\left(\frac{M^2}{M^2-1}\right)^2\cos^2\varphi-\frac{M^2}{M^2-1}}\right]$$

以M为参变量，令φ=0→-180°可得等M圆在对数幅相的曲线簇。

– 等N圆的变换：类似等M圆的变换可推得

$$A^2\cos^2\varphi + A\cos\varphi + A^2\sin^2\varphi - \frac{A\sin\varphi}{tg\alpha} = 0$$

整理得：$A = \dfrac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin\alpha}$

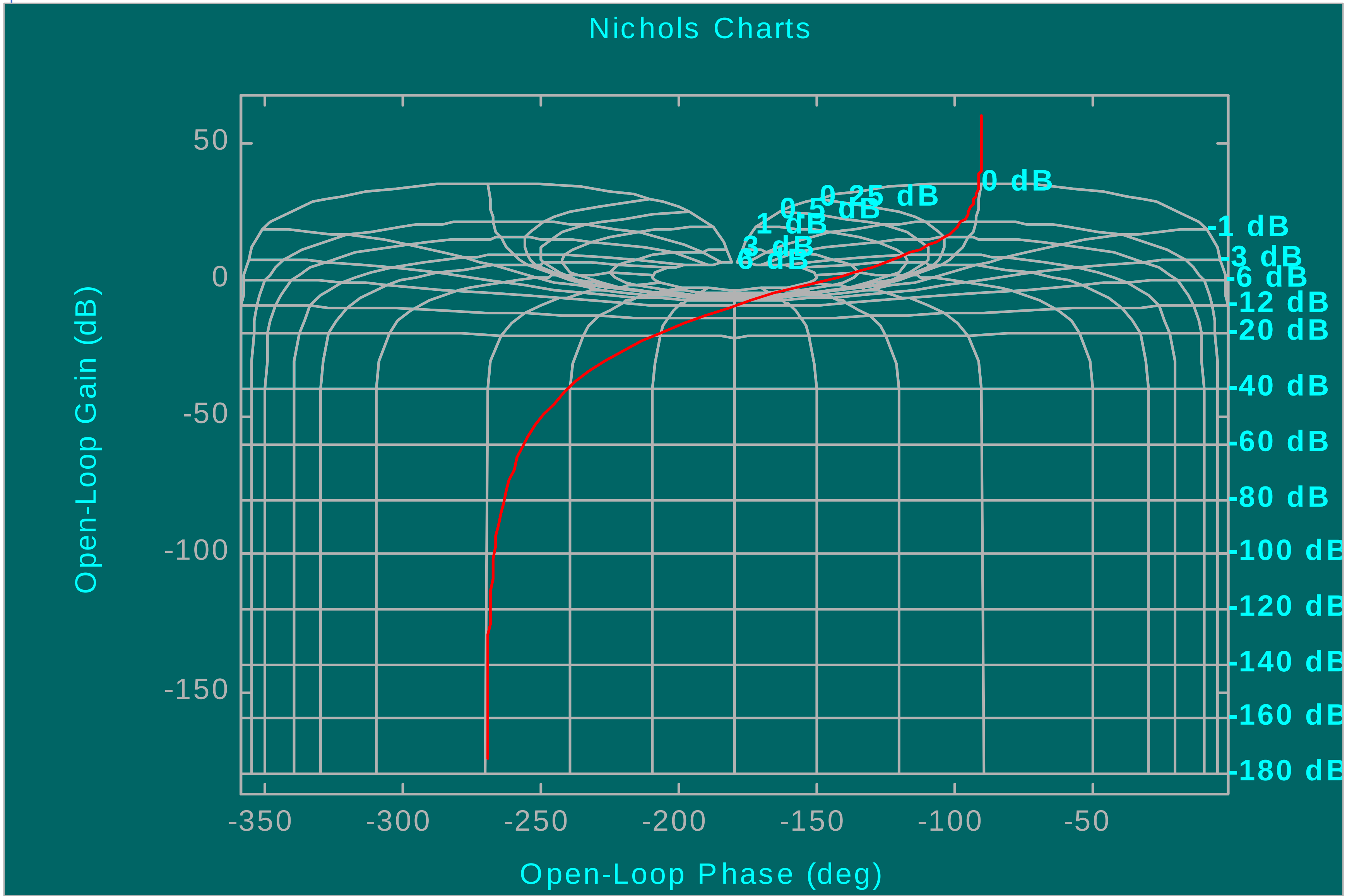
所以$20\lg A = 20\lg\dfrac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin\alpha}$

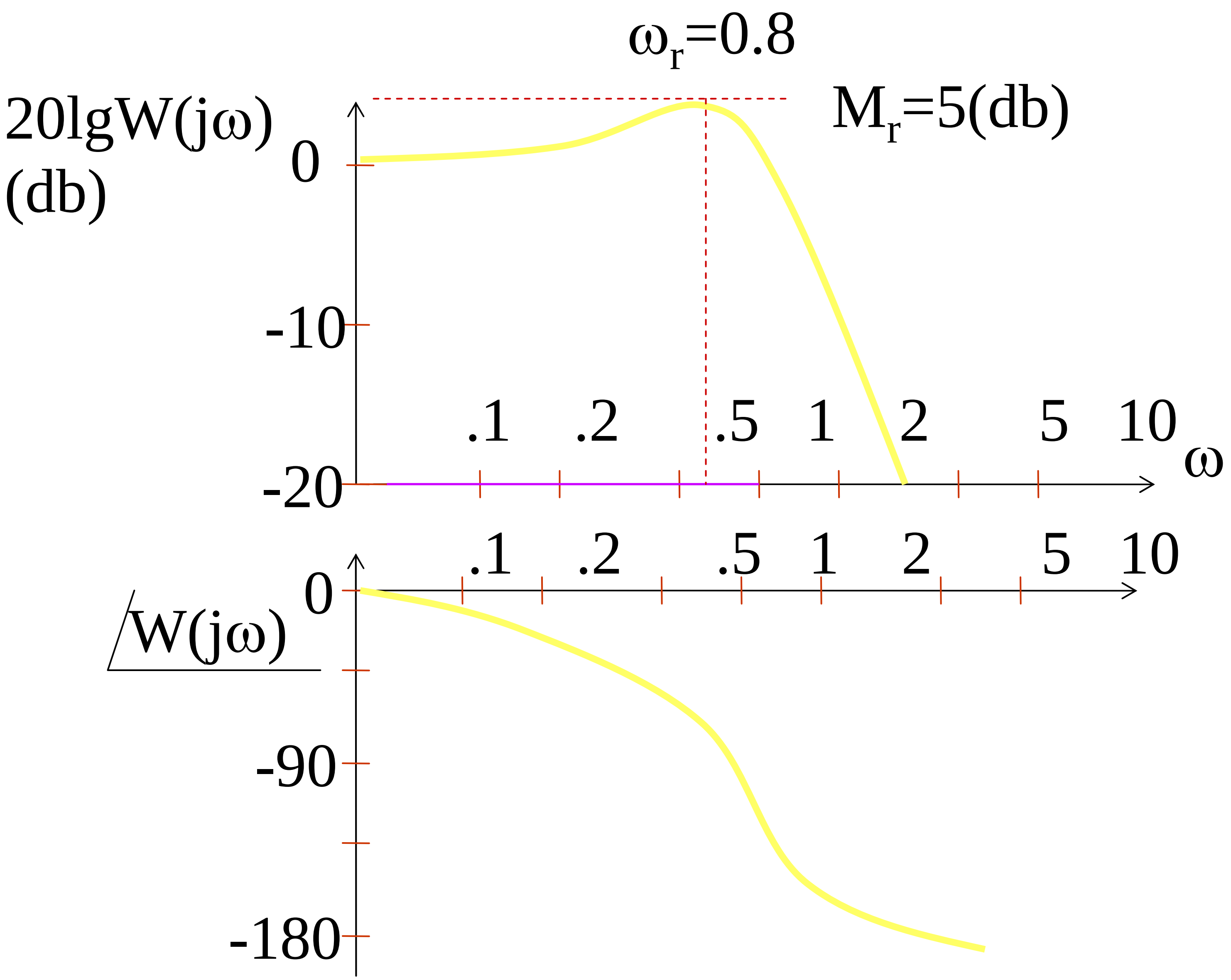
以α 为参变量，令φ=0→-180°可得等N圆在对数相的曲线簇。

2、尼氏图的应用

- 将对数幅相图叠在尼氏图上，通过相交点容易求出闭环系统频率特性的幅值和相角，通过相切点可求得谐振峰值和谐振频率。
- 举例：求单位反馈系统的闭环频率特性。

设开环传递函数$G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$，则有

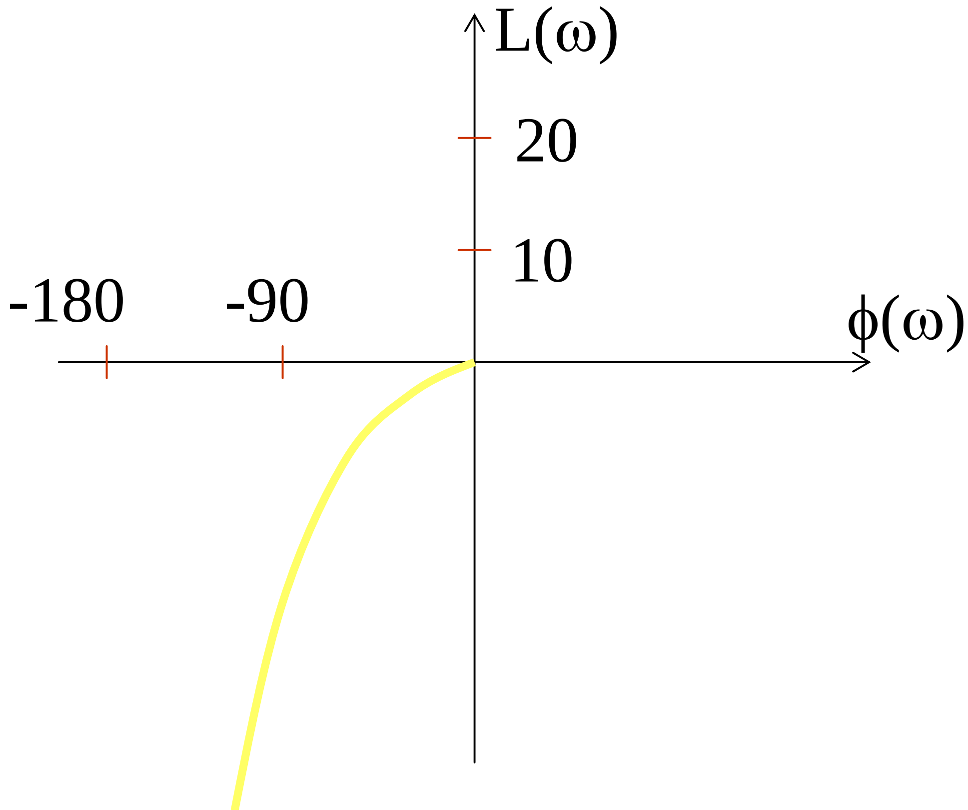




ωr=0.8
Mr=5(db)
20lgW(jω)
(db)
0
-10
-20
.1
.2
.5
1
2
5
10
ω
W(jω)
0
-90
-180
.1
.2
.5
1
2
5
10

对数幅相图图示法：

作法：可先作伯德图得$L(\omega)$ $\phi(\omega)$，再作对数幅相图。



小　　结

频率特性是线性定常系统在正弦函数作用下，稳态输出与输入的复数之比对频率的函数关系。频率特性是传递函数的一种特殊形式，将系统(或环节)传递函数中的复数 S换成纯虚数jω，即可得出系统(或环节)的频率特性。

频率特性图形因其采用的坐标不同而分为幅相特性(Nyquist图)、对数频率特性(Bode图)和对数幅相特性(Nicols图)等形式。各种形式之间是互通的，每种形式有其特定的适用场合。开环幅相特性在分析闭环系统的稳定性时比较直观，理论分析时经常采用；伯德图在分析典型环节参数变化对系统性能的影响时最方便，实际工程应用最广泛；由开环频率特性获取闭环频率指标时，则用对数幅相特性最直接。

奈奎斯特稳定判据是频率法的重要理论基础。利用奈氏稳定判据，除了可判断系统的稳定性外，还可引出相角裕度和幅值裕度的概念，对于多数工程系统而言，可以利用相角裕度和幅值裕度衡量系统的相对稳定性。

开环对数频率特性曲线(伯德图)是控制系统工程设计的重要工具。开环对数幅频特性 L(jω)，低频段的斜率表征了系统的型别(v)，其高度则表征了开环增益的大小，因而低频段全面表征系统稳态性能； L(jω) 中频段的斜率、宽度以及截止频率，表征着系统的动态性能；高频段则表征了系统抗高频干扰的能力。

利用开环频率特性或闭环频率特性的某些特征量，均可对系统的时域性能指标作出间接的评估。其中开环频域指标主要是相角裕度 γ 、截止频率 ωc 。闭环频域指标则主要是谐振峰值 Mr ,谐振频率 ωr 以及带宽频率 ωb ，这些特征量和时域指标 σ %、ts 之间有密切的关系。这种关系对于二阶系统是确切的，而对于高阶系统则是近似的，然而在工程设计中精度完全可以满足要求。