第四章 根轨迹法

第一节 引言

第二节 根轨迹的基本概念

第三节 根轨迹的绘制规则

第四节 开环零极点对根轨迹的影响

第五节 参变量根轨迹族

学习要求

- 基本内容：
  - 根轨迹的基本概念：根轨迹的概念，意义，举例。
  - 绘制常规负反馈系统根轨迹的基本条件和基本规则。
  - 参量根轨迹与多回路系统的根轨迹。
  - 正反馈根轨迹的绘制。
  - 迟后系统根轨迹。
  - 增加开环零极点对根轨迹的影响。
  - 利用根轨迹分析系统的暂态响应。

教学要求

- 了解根轨迹的概念、意义。
- 掌握绘制常规负反馈系统根轨迹基本条件和基本规则。
- 掌握参量根轨迹的绘制和正反馈根轨迹的绘制。
- 了解多回路控制系统的根轨迹和迟后系统根轨迹。
- 掌握增加开环零极点对根轨迹的影响。
- 了解利用根轨迹分析系统的暂态响应。

第一节　引言

A.闭环系统的稳定性和动态性能取决于闭环极点（即特征方程的根）。

B.当待定参数变化时特征根随之变化。

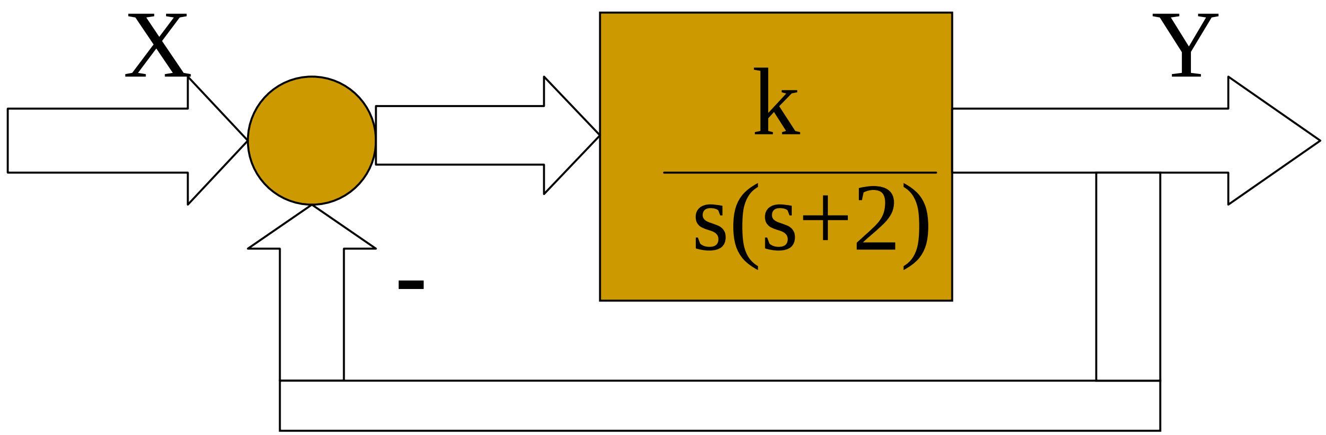
C.用来研究根的变化规律以及和闭环系统性能间的关系的方法，称为控制系统根轨迹分析法。

第二节 根轨迹基本概念

4.2.1 根轨迹

根轨迹：开环传函某个参数由0～∞时闭环特征根在S平面上移动的轨迹。

例:



1)开环传函:

$$G(s)=\frac{K}{s(s+2)}$$

开环极点:$z_1=0$;$z_2=-2$

开环零点: 无

2)闭环传函:

$$Gc(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{K}{s^2+2s+K}$$

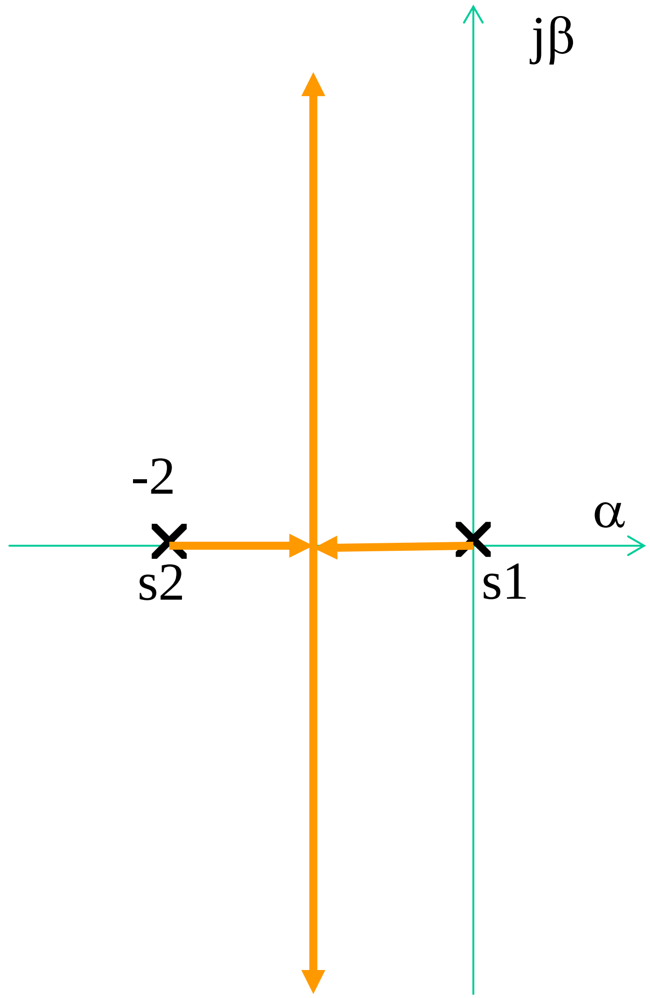
3) 闭环特征方程: $s^2+2s+K=0$

4） 闭环特征根:

$$s1=-1+\sqrt{1-K}$$

$$s2=-1-\sqrt{1-K}$$

K	s_1	s_2
0	0	-2
0.25	$-1+\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-1-\sqrt{\frac{3}{2}}$
1	-1	-1
2	$-1+j$	$-1-j$
5	$-1+2j$	$-1-2j$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
∞	$-1+j\infty$	$-1-j\infty$



问题在于逐点计算工作量大。若要更有效的绘制根轨迹就必须找出绘根轨迹的规律…

4.2.2. 根轨迹方程

闭环特征方程:

$$G(s)H(s) = -1$$

或 $$K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)} = -1$$

}根轨迹方程

（K称为根轨迹增益）

0≤K≤∞常规根轨迹,简称根轨迹;

–∞<K≤0补根轨迹或余根轨迹;

–∞<K<∞完全根轨迹,简称全根轨迹。

4.2.3 根轨迹满足条件

由根轨迹方程：

$$K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}=-1$$

幅值条件方程(模相等)：

$$|G(s)H(s)|=1 \text{或} K\frac{\prod_{i=1}^{m}|(s+z_i)|}{\prod_{j=1}^{n}|(s+p_j)|}=1$$

相角条件方程(相角相等):

$$G(s)H(s)=\pm(2k+1)\pi$$

$$\sum_{i=1}^{m}\angle(s+z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s+p_j)=\pm(2k+1)\pi$$

注释:

☆根轴迹上的点应同时满足上两个方程;

🕑相角条件是决定根轨迹的充要条件，s平面上一点s’若满足相角条件即为根轨迹上的一点;

🕓幅值条件用来确定对应的K。

🕒相角条件用来确定根轨迹点$s=\sigma+j\beta$;

🕐相角条件方程与K无关，幅值方程才与K相关;

绘制根轨迹方法:

- 试探法,任选s看是否满足相角条件;
- 按基本规则(如下节讲述)手工绘制;
- 用计算机绘制。

第三节 根轨迹绘制规则

[规则1] 根轨迹分支数=n

证： n阶特征方程有n个根，K从0→∞时，n个根随之变化，故有n条根轨迹。

第三节 根轨迹绘制规则

[规则2]：根轨迹起于开环极点，终于开环零点或无穷远点，且终于无穷点的分支数为n-m。

证：由幅值条件：
$$\frac{\prod\left|(s+Z_i)\right|}{\prod\left|(s+P_j)\right|}=\frac{1}{K}$$

知当 $K=0$时，必有 $\prod\left|(s+P_j)\right|=0$

$\left|(s+P_j)\right|=0$

$j=1,2,\cdots,n$必有 $s=-P_j$

$\therefore$ s从 $-P_j$起；当 $K=\infty$时，必有

$\prod\left|(s+Z_i)\right|=0$

$\left|(s+Z_i)\right|=0$

$i=1,2,\cdots,n$

必有 $s=-Z_i$

$\therefore$ s以 $-Z_i$或∞终。

第三节 根轨迹绘制规则

[规则3]根轨迹与实轴对称

证：特征根要么实根，要么为共轭复根，所以必与实轴对称。

第三节 根轨迹绘制规则

[规则4] 实轴上根轨迹区段右边的开环零点和开环极点总数为奇数。

$$\sum_{i=1}^{m} \angle(s+z_i) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s+p_j)$$

$$= (\sum \angle(s+z_i) + \sum \angle(s+z_i) + \sum \angle(s+z_i)$$

$$- \sum \angle(s+p_j) + \sum \angle(s+p_j) + \sum \angle(s+p_j))$$

$$= \sum \angle(s+z_i) - \sum \angle(s+p_j)$$

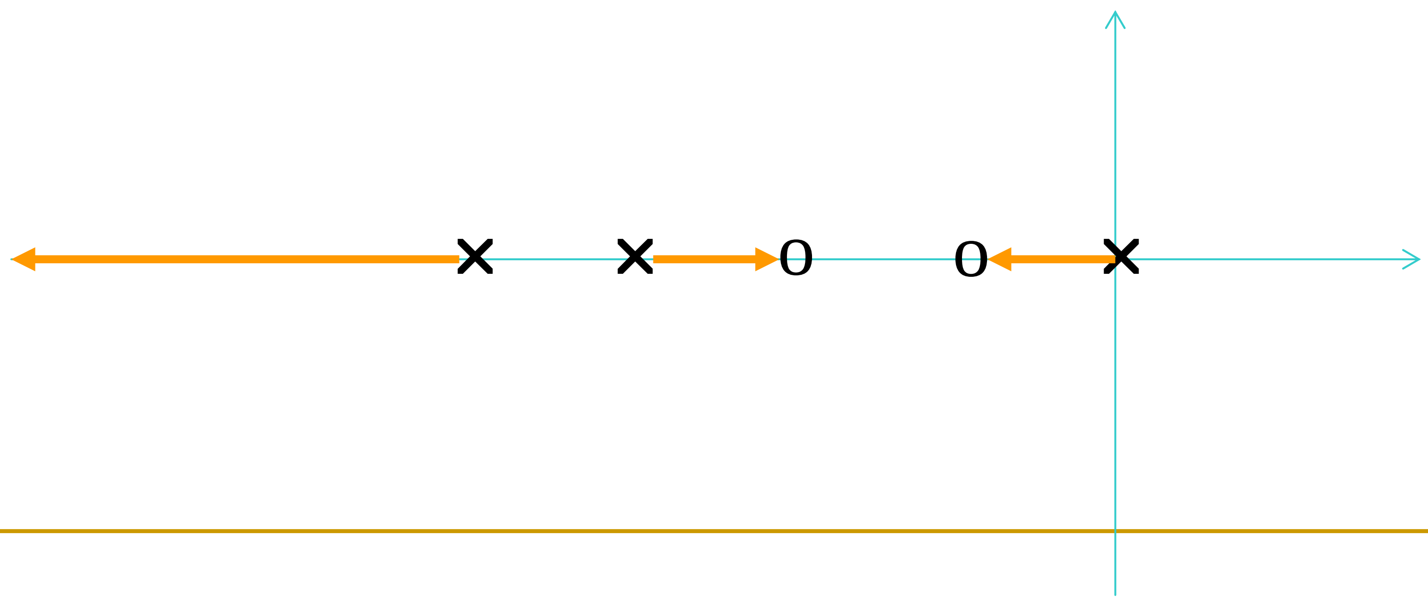
$$= (m_r - n_r) \cdot 180^\circ$$

$$= \text{奇数} \cdot 180^\circ$$

例：已知开环传函为 $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+1)(s+2)}{s(s+3)(s+4)}$

求根轨迹。

解：$p_1=0$，$p_2=-3$，$p_3=-4$, $z_1=-1$，$z_2=-2$



第三节 根轨迹绘制规则

[规则5]有n-m条根轨迹分支沿渐近线趋于无穷远，其渐近线与正实轴的夹角为：

$$\varphi_\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

$$k = 0,1,2,\cdots$$

与实轴的交点为：

$$\sigma_\alpha = \frac{\sum_{j=1}^{n}(-P_j) - \sum_{i=1}^{m}(-Z_i)}{n-m}$$

证1：设无穷远处有特征根S，则所有的开环有限零极点到S的矢量的幅角可以认为是相等的，即

$$\angle(s+z_i)=\angle(s+p_j)=\varphi_\alpha$$

则据幅角条件：

$$\sum_{i=1}^{m}\angle(s_k+z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s_k+p_i)=m\varphi_\alpha-n\varphi_\alpha$$

$$=(m-n)\varphi_\alpha=\pm(2k+1)\pi$$

$$\varphi_\alpha=\frac{(2k+1)\pi}{(n-m)}$$

$$k=0,1,2,\cdots$$

证2：对于无穷远处的点S，所有有限的开环零极点可记为一点，其位置为实轴上的一个−σ点上。则由幅值条件可得到

$$\frac{\prod\left|(s+p_j)\right|}{\prod\left|(s+Z_i)\right|}=\frac{\prod_{j=1}^{n}\left|s+\sigma\right|}{\prod_{i=1}^{m}\left|s+\sigma\right|}$$

$$=(s+\sigma)^{n-m}=s^{n-m}+\sigma(n-m)s^{n-m-1}+\cdots$$

据多因式相乘公式

$$\frac{\prod(s+P_j)}{\prod(s+Z_i)}=\frac{s^n+\sum P_j s^{n-1}+\cdots}{s^m+\sum Z_i s^{m-1}+\cdots}$$

$$=s^{n-m}+(\sum P_j-\sum Z_i)s^{n-m-1}+\cdots$$

$$\therefore s^{n-m}+\sigma(n-m)s^{n-m-1}+\cdots$$

$$=s^{n-m}+(\sum P_j-\sum Z_i)s^{n-m-1}+\cdots$$

例：已知：$G(s)H(s)=\dfrac{K(s+1)}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$

求根轨迹.

解：$n=4, m=1, n-m=3$

$\therefore$ 有三个分支 $\rightarrow \infty$

$$\varphi_\alpha=\frac{(2K+1)\pi}{n-m}=\frac{(2k+1)180^\circ}{3}=\begin{cases}60^\circ & k=0\\ 180^\circ & k=1\\ 300^\circ & k=2\end{cases}$$

$$\sigma_\alpha=\frac{\sum(-P_j)-\sum(-Z_i)}{n-m}$$

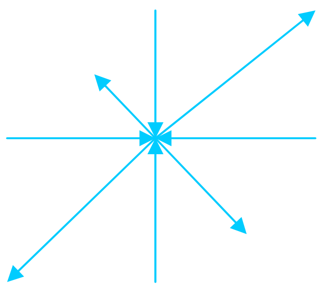
$$=\frac{(0-3+(-1+j)+(-1-j)-(-1))}{3}$$

$$=\frac{(-2-1-1)}{3}=\frac{-4}{3}=-1.33$$

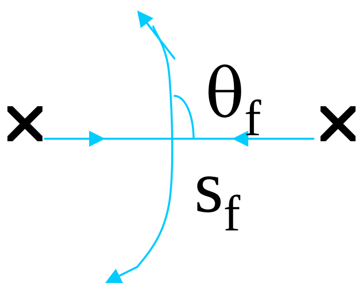
定义：

根轨迹分离点—L条根轨迹在S平面上相遇又分开的点，分离点为重根点，L为重根数.

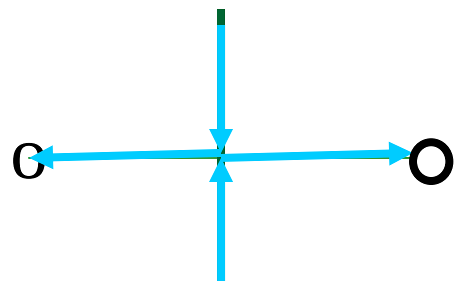
根轨迹分离角—进入分离点又分开的角度



四重根



相邻极点间的分离点



相邻零点间的会合点

第三节 根轨迹绘制规则

[规则6]：分离点或会合点s_f与分离角θ的确立

$$\theta_f = \frac{\pi(2k+1)}{L} \qquad k = 0,1,2\cdots(L-1)$$

或 $$\theta_f = \frac{(2k\pi)}{L}$$

s_f满足

$$\frac{d\left[G(s)H(s)\right]}{ds} = 0 \quad 或 \quad \frac{dk}{ds} = 0$$

例 :已知 $G(s)H(s)=\dfrac{K}{s(s+1)(s+2)}$

求分离点和分离角 .

解 : $K = -s(s+1)(s+2)$

$$\frac{dk}{ds} = -(3s^2+6s+2) = 0$$

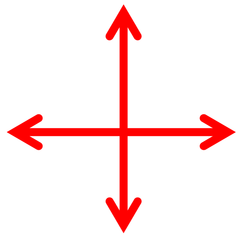
$$S_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-24}}{6} = \begin{cases} -0.423 \\ -1.577 \end{cases}$$

$S=-0.424$ 在根轨迹上 ,为所求

$$\theta_f = 180^\circ \frac{(2k+1)}{2} = 90^\circ \quad (k=0)$$

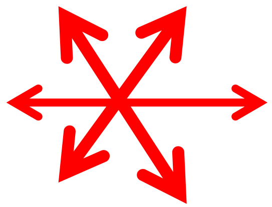
关于分离角的讨论 :

$$\begin{cases} \theta_{f1} = \pi \dfrac{(2k+1)}{L} & k = 0,1,2 \cdots ,(L-1) \\ \theta_{f2} = \pi \dfrac{(2k)}{L} & k = 0,1,2 \cdots ,(L-1) \end{cases}$$



$$L = 2: \quad \theta_{f1} = 90^\circ(2k+1) = \begin{cases} 90^\circ & k = 0 \\ 270^\circ & k = 1 \end{cases}$$

$$\theta_{f2} = 90^\circ(2k) = \begin{cases} 0^\circ & k = 0 \\ 180^\circ & k = 1 \end{cases}$$



$$L=3:\quad \theta_{f_1}=60^\circ(2k+1)=\begin{cases} 60^\circ & k=0 \\ 180^\circ & k=1 \\ 300^\circ & k=2 \end{cases}$$

$$\theta_{f_1}=60^\circ(2k)=\begin{cases} 0^\circ & k=0 \\ 120^\circ & k=1 \\ 240^\circ & k=2 \end{cases}$$

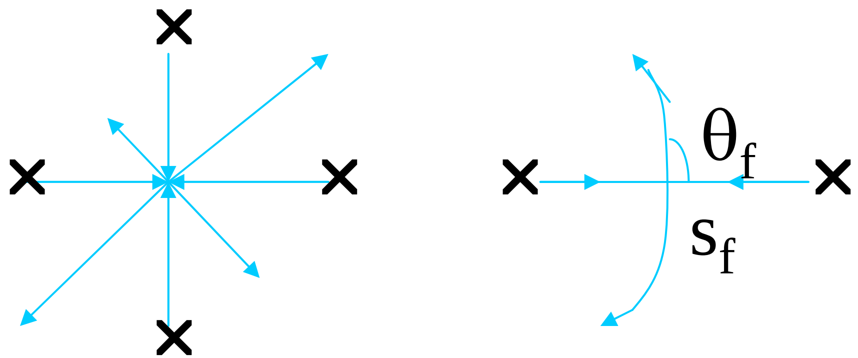
其实应表达为:

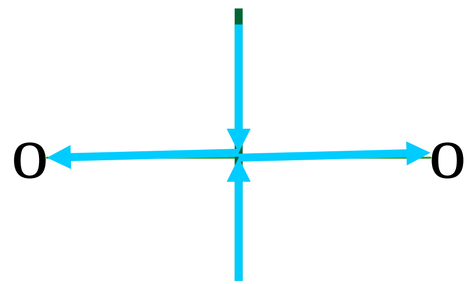
$$\theta_f = k\frac{\pi}{L} \qquad \mathrm{k} = 0,1,2\cdots,(2\mathrm{L}-1)$$

$$\theta_f = \begin{cases} 90k & \mathrm{L}=2 & \mathrm{k}=0,1,2,3 \\ 60k & \mathrm{L}=3 & \mathrm{k}=0,1,2,3,4,5 \\ 45k & \mathrm{L}=4 & \mathrm{k}=0,1,2,3,4,5,6,7,8 \\ 36k & \mathrm{L}=5 & \mathrm{k}=0,1,\cdots 9 \\ 30k & \mathrm{L}=6 & \mathrm{k}=0,1,\cdots 11 \end{cases}$$

重根数L的判别：

(1) 从根轨迹图判别较容易，如：



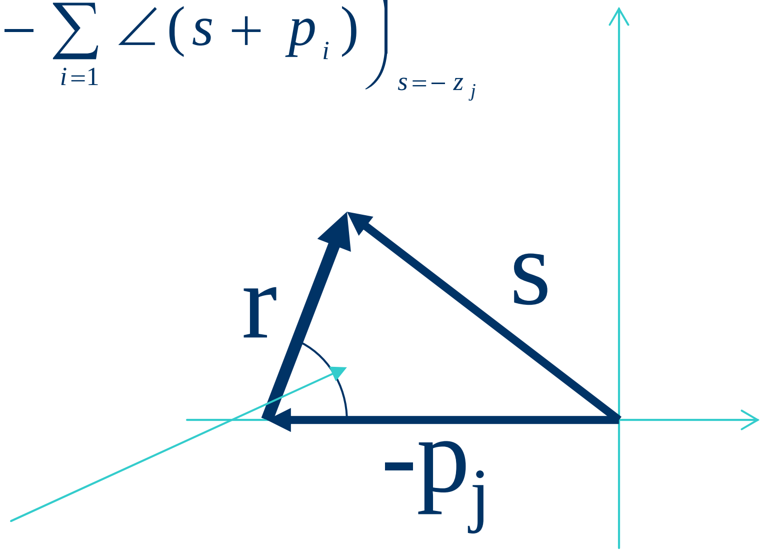


(2)或从 $\dfrac{dk}{ds}=0$ 判别，当有 $(s+b)^m=0$ 时，可能有重根数L＝m＋1

第三节 根轨迹绘制规则

【规则7】：起始（出射）角与终止（入射）角的计算：

$$\begin{cases} \theta_{p_j} = (2L+1)\pi + \left(\sum_{i=1}^{m} \angle(s+Z_i) - \sum_{j=1, i\neq j}^{n} \angle(s+p_i) \right)_{s=-p_j} \\ \theta_{z_j} = (2L+1)\pi - \left(\sum_{i=1, i\neq j}^{m} \angle(s+Z_i) - \sum_{i=1}^{n} \angle(s+p_i) \right)_{s=-z_j} \end{cases}$$



定义：$\theta_{p_j} = \lim_{s \to p_j} \angle (s + p_j)$

$$\theta_{z_j} = \lim_{s \to z_j} \angle \left(s + z_j\right)$$

$s + p_j$为向量 r

$$-p_j + r = s$$

$$r = s - (-p_j),$$

第三节 根轨迹绘制规则

[规则8]：根轨迹与虚轴上的交点对应的临界增益可用jω代入特征方程中求出或利用劳斯判据求出。

例　已知 $G(s)H(s)=\dfrac{k}{s(s+1)(s+4)}$

求与虚轴的交点及对应的临界K*。

解法1: 特征方程 $s(s+1)(s+4)+k=0$

即 $s^3+5s^2+4s+k=0$

令 $s=j\omega$ 有:

$$(j\omega)^3+5(j\omega)^2+4j\omega+k=0$$

$$-j\omega^3-5\omega^2+4j\omega+k=0$$

$$\begin{cases} j(4\omega-\omega^3)=0 & \omega(4-\omega^2)=0 \quad \omega=0\text{或}\pm 2 \\ K-5\omega^2=0 & K=5\omega^2=5\times 4=20 \end{cases}$$

$\therefore \omega=\pm 2,\ K^*=20$

解法 2：

s	1	4	0
s	5	k	0
s	$\dfrac{(20-k)}{5}$	0	
1	k		

$$\begin{cases} 20-k>0 \\ k>0 \end{cases}$$

$$\therefore\ 0<k<20$$

$$k=20$$

$$5s2+k=0$$

$$5(j\omega)2+k=0$$

$$-5\omega 2+k=0$$

$$\omega 2=\frac{k}{5}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{20}{5}}=\pm 2$$

$$\therefore\ K=20\ -\ \omega=2$$

第三节 根轨迹绘制规则

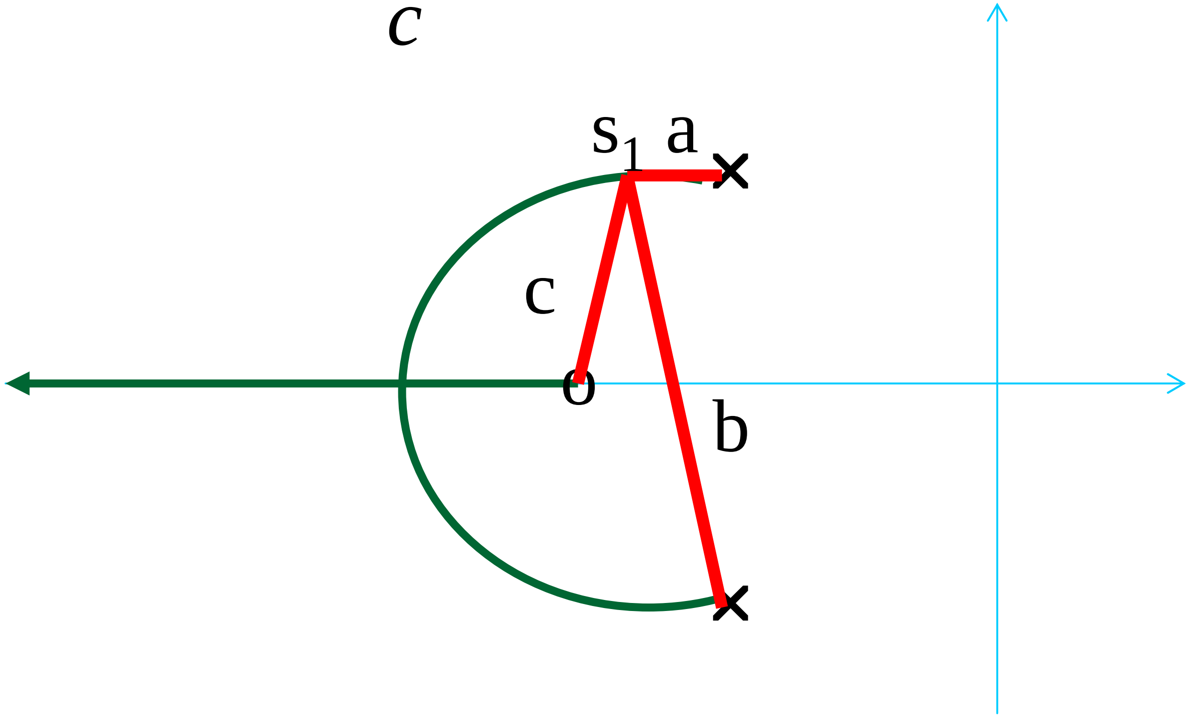
【规则9】： 根轨迹上的任意一点S_1的k值：

$$K=\frac{\prod\left|(s_1+P_j)\right|--\text{各极点到}s_1\text{的向量长度之积}}{\prod\left|(s_1+z_i)\right|--\text{各零点到}s_1\text{的向量长度之积}}$$

例： 求图中根轨迹上点s_1的K

解：

$$K = a \cdot \frac{b}{c}$$



第三节 根轨迹绘制规则

[规则10]:

若n-m≥2,则系统所有闭环特征根之和等于等于开环特征根之和，并等于常数;

若$n \geq m$，则系统有闭环特征根之积乘以$(-1)^n$等于闭环特征方程常数项。

设$-P_i$为开环特征根,$-q_j$为闭环特征根,则

(1) $$\sum_{i=1}^{n}(-P_i)=\sum_{j=1}^{n}(-q_j)\quad n>m+2$$

(2) $$(-1)^n\prod_{j=1}^{n}(-q_j)=$$ 闭环特征方程常数项

该规则有两个作用：

（1）定性判断根轨迹的走向；

（2）已知几个闭环根可以求出其他一个或两个根

因为闭环特征根之和为常数，所以对于$n-m\geq 2$的系统，随K的变化，一部分根轨迹分支向左移动，另一部分将向右移动。

证:开环传函:$G(s)H(s)=\dfrac{K_r\prod_{i=1}^{m}(s+Z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+P_j)}$ (n ≥ m)

闭环系统特征方程:

$$\prod_{j=1}^{n}(s+P_j)+K_r\prod_{i=1}^{m}(s+Z_i)$$

$$=\prod_{j=1}^{n}(s+q_j) \quad n>m$$

展开连乘积项有 ：

$$s^{n}+(\sum_{j=1}^{n}P_{j})s^{n-1}+\cdots+\sum_{j=1}^{n}P_{j}+K_{r}\cdot[s^{m}$$

$$+(\sum_{i=1}^{m}Z_{i})s^{m-1}+\cdots+\prod_{i=1}^{m}Z_{i}]$$

$$=s^{n}+(\sum_{j=1}^{n}q_{j})s^{n-1}+\cdots+\prod_{j=1}^{n}q_{j}\quad n>m$$

$n-m \geq 2$时，等式两边 s^{n-1}项系数应相等，则有

$$\sum_{j=1}^{n} P_j = \sum_{j=1}^{n} q_i$$

$n > m$时，等式两边常系数也应相等，则有

$$\prod_{j=1}^{n} P_j + K_r \prod_{i=1}^{m} Z_i = \prod_{i=1}^{n} q_i = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (-q_i)$$

当$n = m$时，闭环系统特征方程为：

$$\prod_{j=1}^{n} (s + p_j) + K_r \prod_{i=1}^{m} (s + z_i) = (1 + k_r) \prod_{j=1}^{n} (s + q_j)$$

展开连乘积项后有:

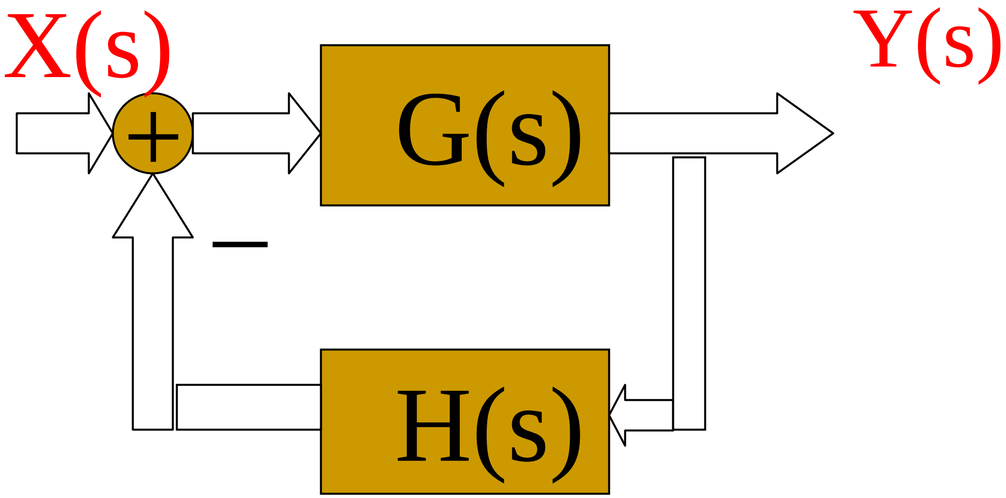
$$s_n+(\sum_{j}^{n}P_j)s^{n-1}+\cdots+\prod_{j=1}^{n}P_j+K_r[s^m+(\sum_{i=1}^{m}z_i)s^{m-1}+\cdots+\prod_{i=1}^{m}z_i]$$

$$=(1+K_r)(s^n+(\sum_{j=1}^{n}q_j)s^{n-1}+\cdots+\prod_{j=1}^{n}q_j)$$

则$\prod_{j=1}^{n}P_j+K_r\prod_{i=1}^{m}Z_i=(1+K_r)\prod_{i=1}^{n}q_i$

根轨迹绘制规则应用举例

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}$$



解（1）因为**1 + G(s)H(s)=0**为**5**阶系统，故根轨迹为**5**条；

（**2**）标出**5**个开环极点和**1**个开环零点**;**

$$-p_1 = 0, -p_2 = -5, -p_3 = -6, -p_{4.5} = -1 \pm j;$$

$$-Z_1 = -3;$$

next

(3)零点的个数为1，极点的个数为5，故n-m=4条渐近线；

$$倾角\varphi_{\alpha}=\frac{\pi(2k+1)}{n-m}=\frac{180^{\circ}(2k+1)}{4}=\begin{cases}45^{\circ} & k=0\\135^{\circ} & k=1\\225^{\circ}(-135^{\circ}) & k=2\\315^{\circ}(-45^{\circ}) & k=3\end{cases}$$

$$交点\sigma_{\alpha}=\frac{\sum(-P_j)-\sum(-Z_i)}{n-m}=\frac{0-5-6-1-j-1+j+3}{4}=-2.5$$

next

(4) 实轴上的根轨迹判别；

(5) 出射角：

$$\theta_{p4} = 180^\circ - \angle(P_4 - Z_1) + \angle(P_4 - P_1)$$

$$+ \angle(P_4 - P_2) + \angle(P_4 - P_5)$$

$$= 180^\circ - \angle(1 - j - 3) + \angle(1 - j - 0)$$

$$+ \angle(1 - j - 5) + \angle(1 - j - 6) + \angle(1 - j - 1 - j)$$

$$= 180^\circ + 26.6^\circ - (135^\circ + 14^\circ + 11.4^\circ + 90^\circ)$$

$$= -43.8^\circ$$

θ_{p_5} 与 θ_{p_4} 对称 $\quad \therefore \theta_{p_5} = 43.8^\circ$

next

(6) 根轨迹与虚轴的交点 (利用劳斯判据):

闭环方程： $s^5+13s^4+54s^3+82s^2+(60+K)s+3K=0$

$$
\begin{array}{llll}
s^5 & 1 & 54 & 60+k \\
s^4 & 13 & 82 & 3K \\
s^3 & 47.7 & 60+0.769K & 0 \\
s^2 & 65.6-0.212K & 3K & 0 \\
s & \dfrac{3940-105K-0.163K^2}{65.6-0.212K} & & \\
1 & 3K & &
\end{array}
$$

第一列>0则要:

$65.6-0.212K>0$或$K<309$

$3940-105K-0.163K^2>0$或$K<35$和$K>0$

故有$0<K<35$, $K=0$和$K=35$时根轨迹与虚轴相交.

解劳斯表中一行元素构 成的辅助方程:

$$(65.6-0.212K)s^2+3K=0$$

$K=35$代入

$$58.2s^2+105=0$$

$$s=\pm j1.34=jw$$

$$\therefore w=\pm 1.34$$

也可用代入法,但方程难解,略.

(7)确定分离点：

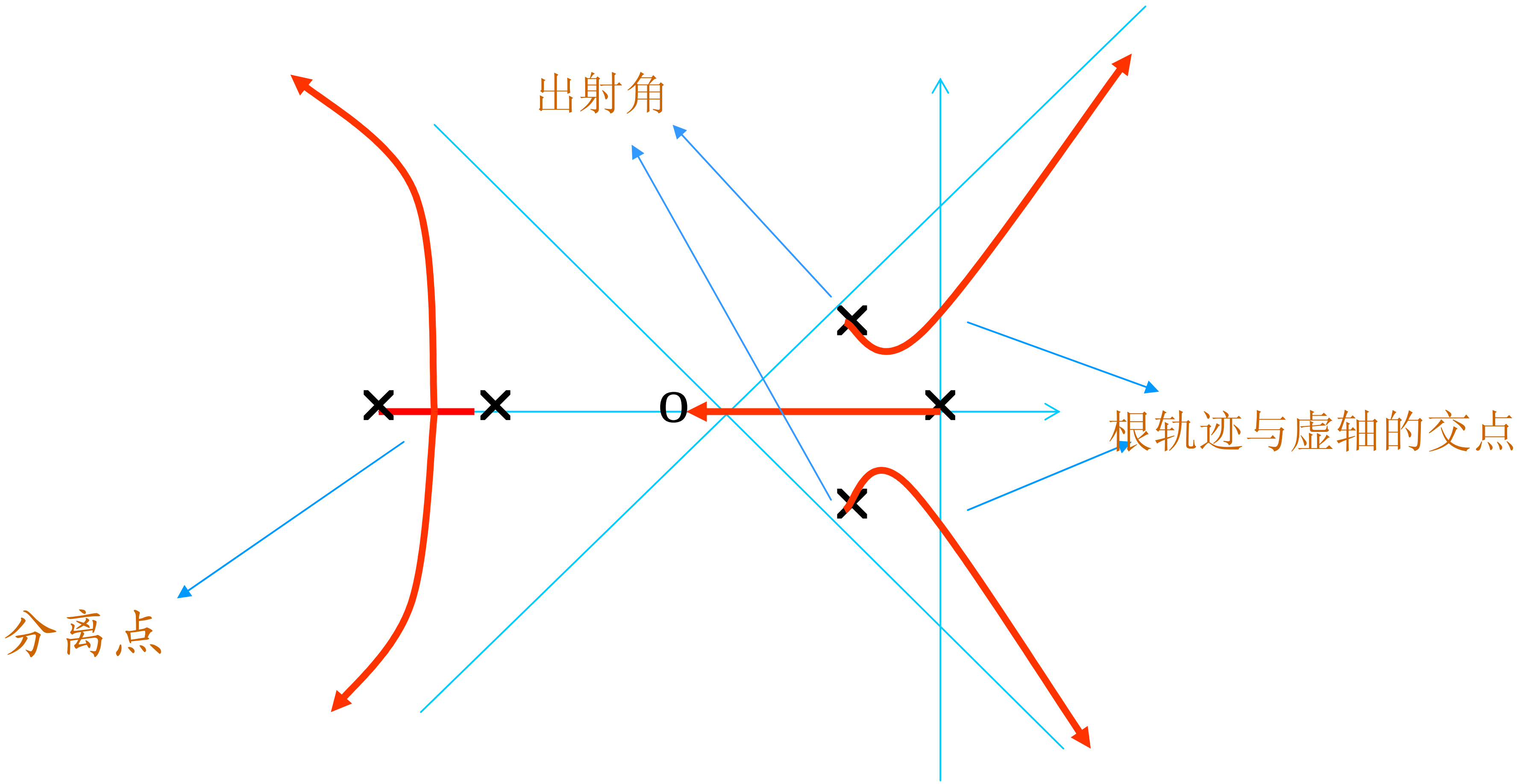
$$K=-\frac{s^5+13s^4+54s^3+82s^2+60s}{s+3}$$

令: $\frac{dk}{ds}=0$

$$s^5+13.5s^4+66s^3+142s^2+123s+45=0$$

高阶方程不易求解，用试探法可以求得：

S＝－5.53


出射角
0
根轨迹与虚轴的交点
分离点

第四节 开环零极点对根轨迹的影响

1.增加开环零极点时

☆增加开环极点将使根轨迹向

右半平面移动,使系统稳定性变差;

🕐增加开环零点将使根轨迹向

左半平面移动,使系统稳定性变好。

举例验证：

①增加极点:

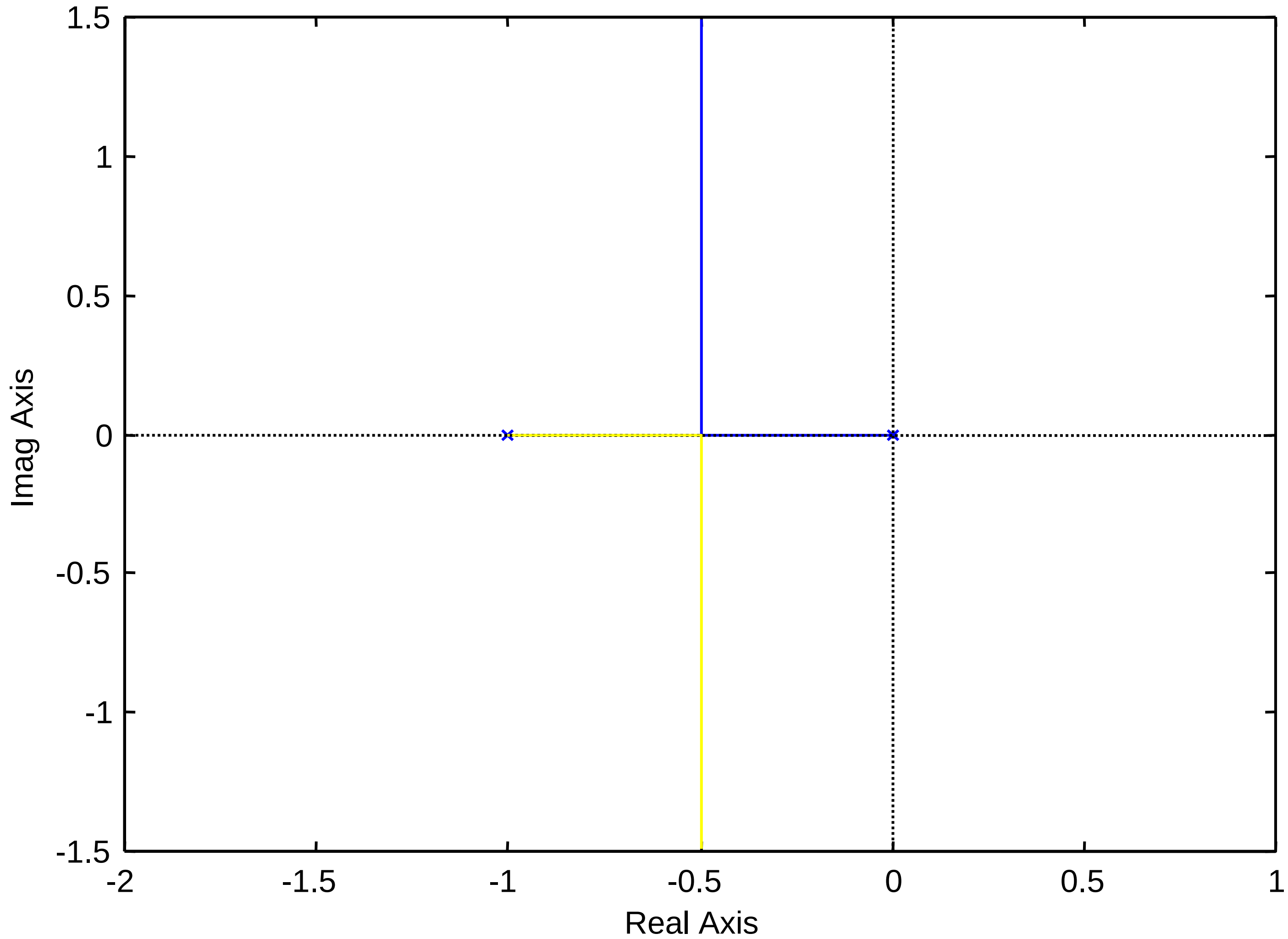
$$1)\; G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+a)}$$

$$2)\; G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+a)(s+b)}$$

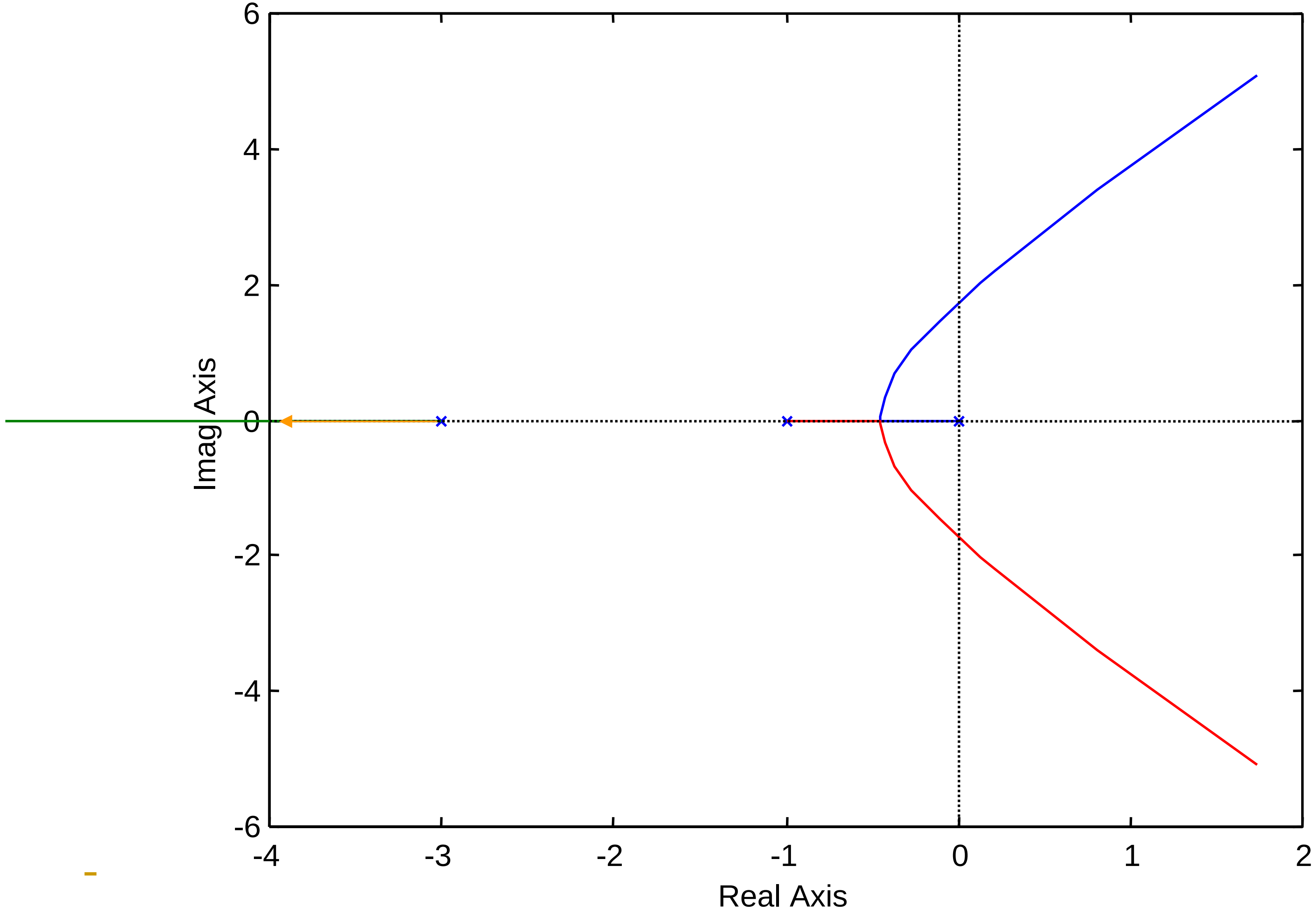
$$3)\; G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+a)(s+b)(s+c)}$$

$$4)\; G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+a)(s-s_1)(s-s_2)}$$

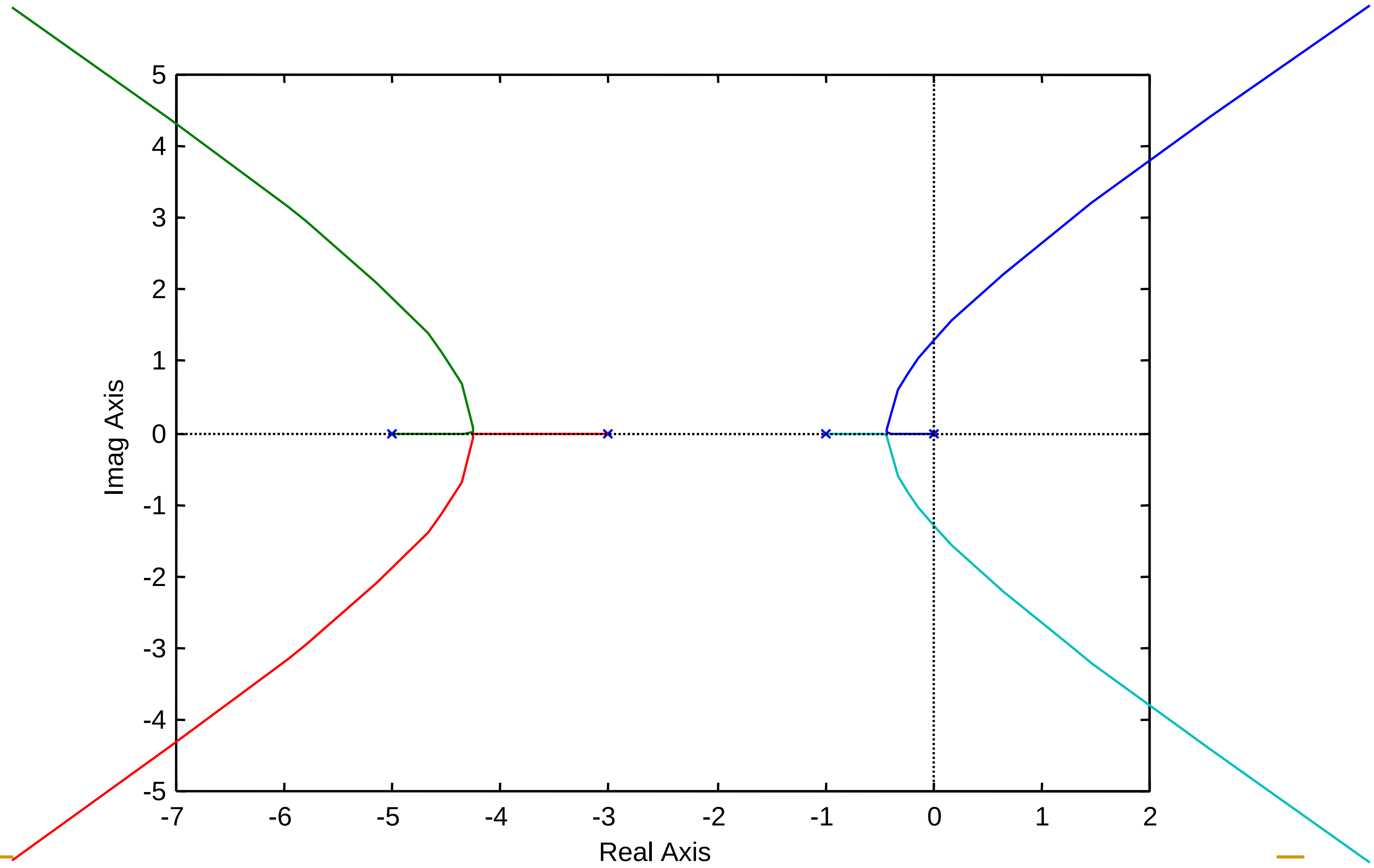
1) $G(s)H(s)=\dfrac{K}{s(s+a)}$ 当a=1时根轨迹如图示.



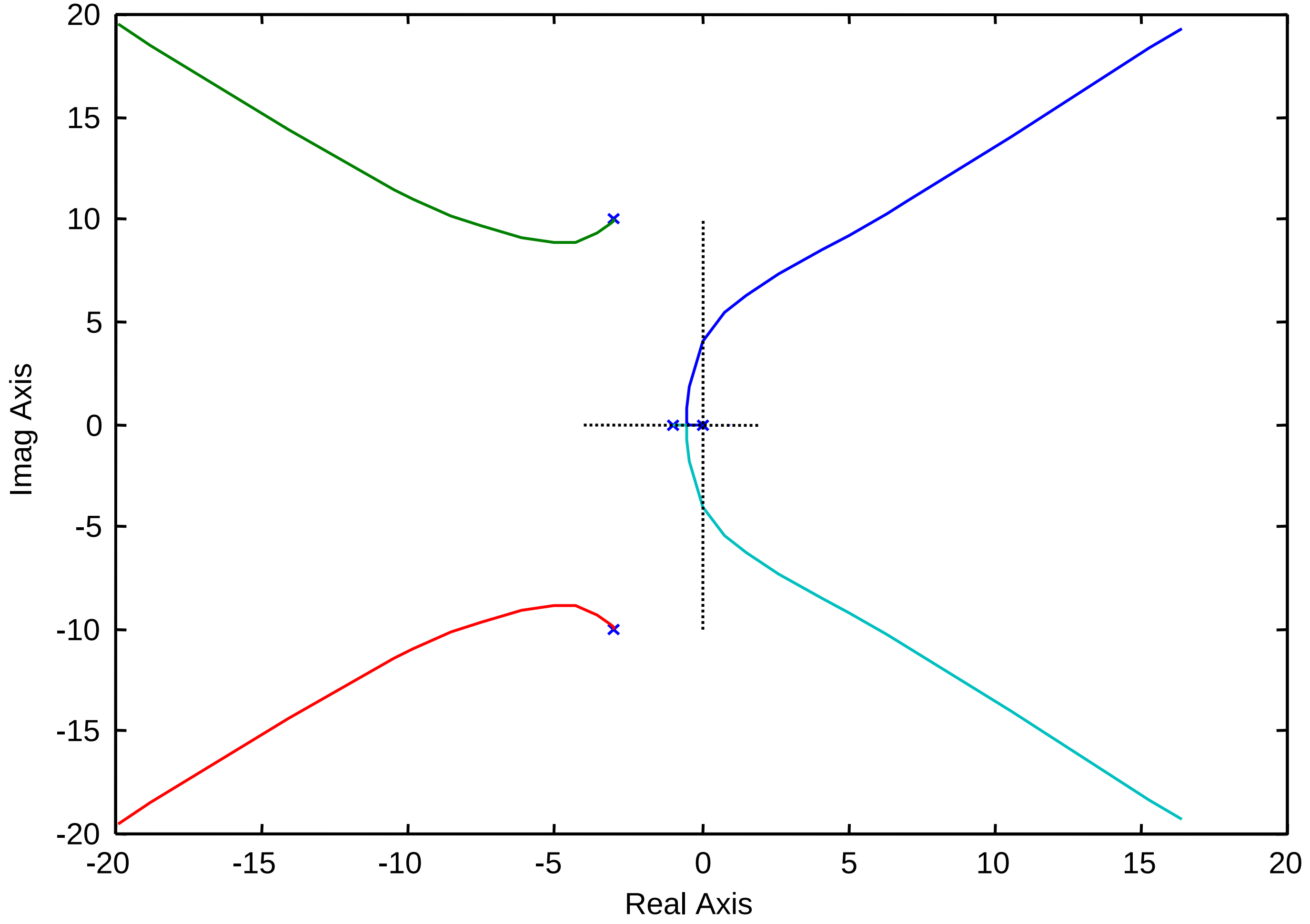
2) 加一个实极点$G(s)H(s)=\dfrac{K}{s(s+a)(s+b)}$ 取 a=1, b=3 根轨迹如图.



3) 加二个实极点 $G(s)H(s)=\dfrac{k}{s(s+a)(s+b)(s+c)}$ 取a=1,b=3, c=5



4) 加一对复极点$G(s)H(s)=\dfrac{K}{s(s+a)(s+s_1)(s+s_2)}$ 取s_1=3+10i；s_2=3-10i



图四

☆增加开环极点将使根轨迹向

右半平面移动,使系统稳定性变差;

举例验证：

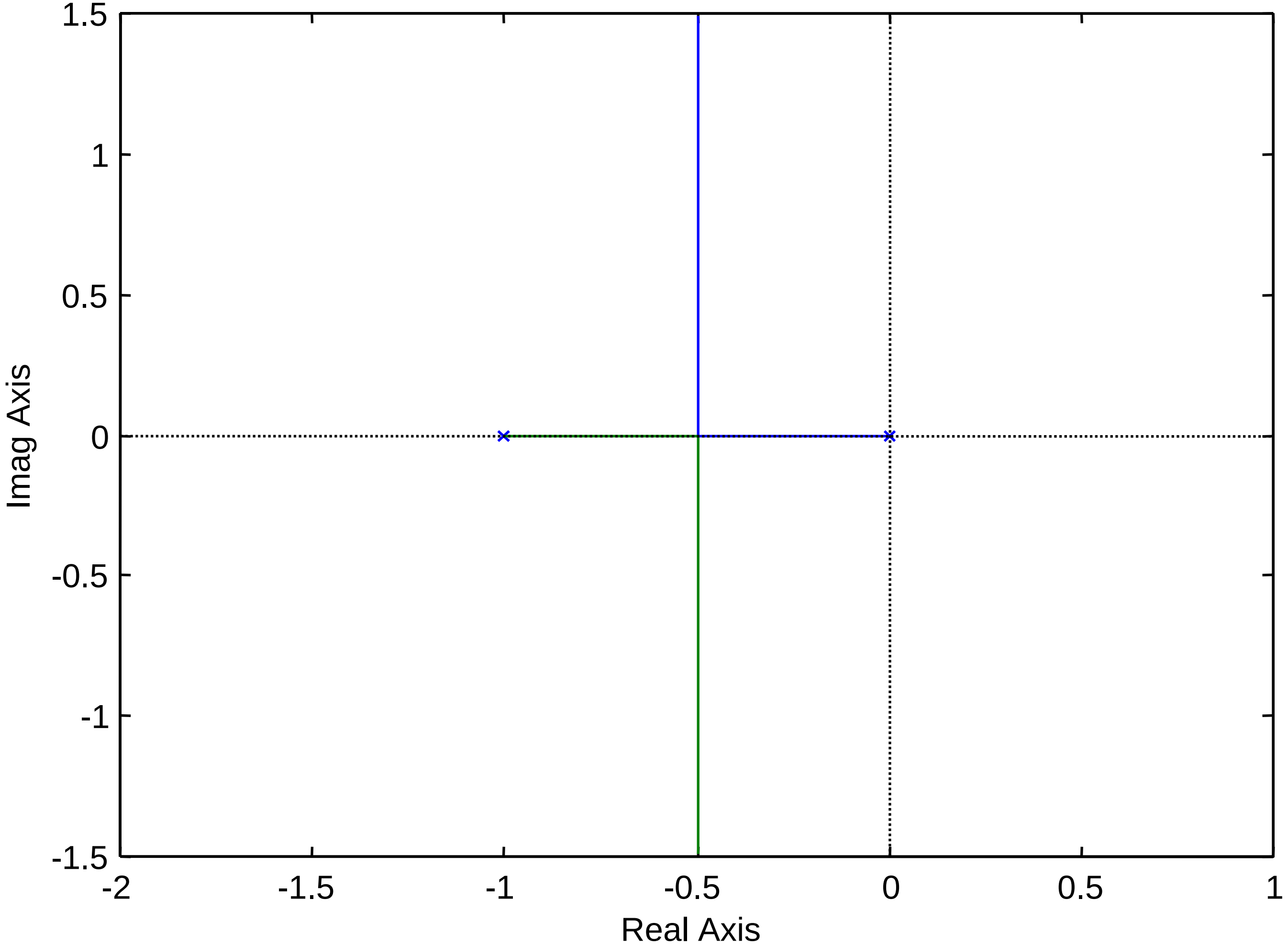
②增加零点：

$$1)G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+a)}$$

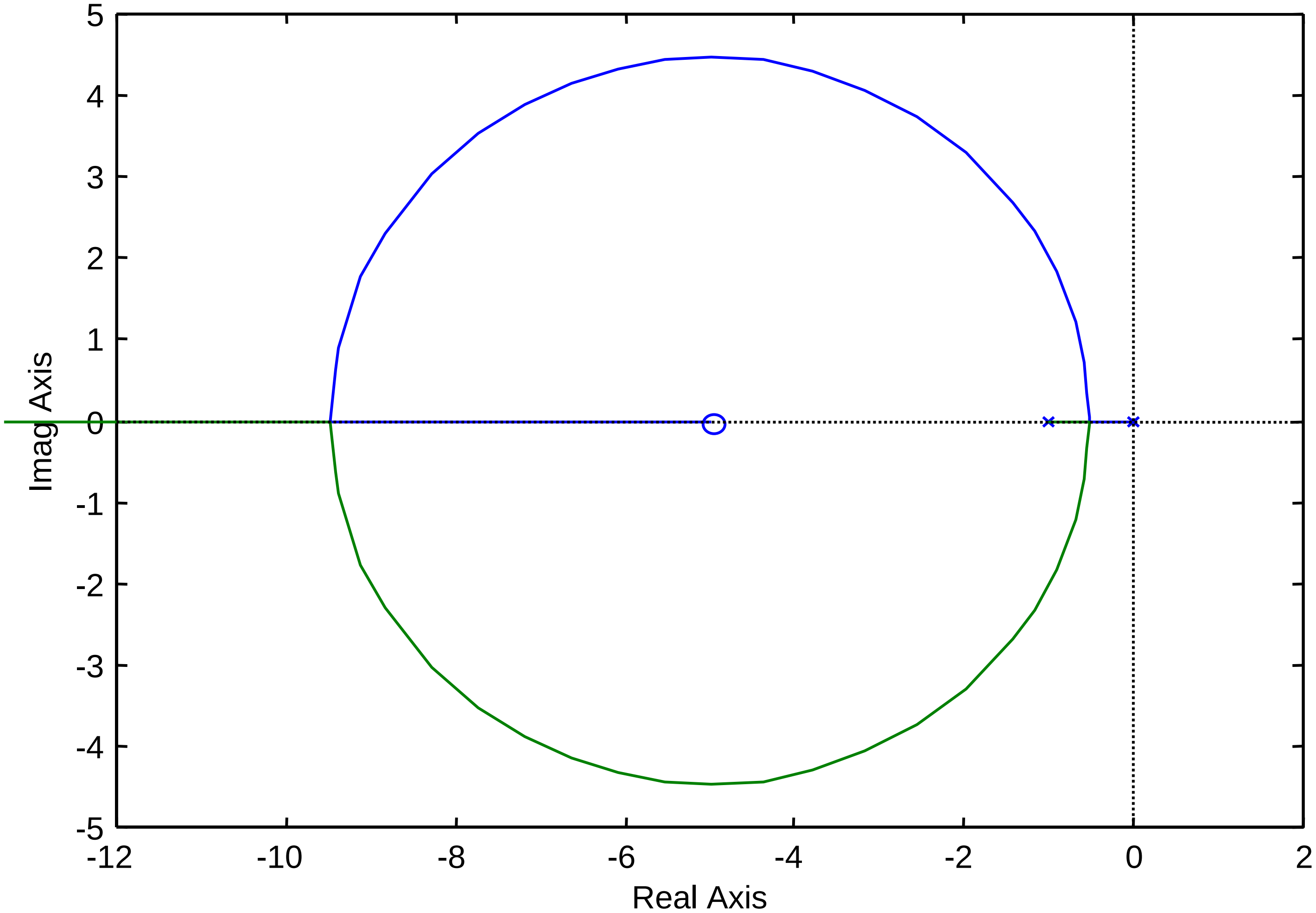
$$2)G(s)H(s)=\frac{K(s+b)}{s(s+a)}$$

$$3)G(s)H(s)=\frac{K(s-s_1)(s-s_2)}{s(s+a)}$$

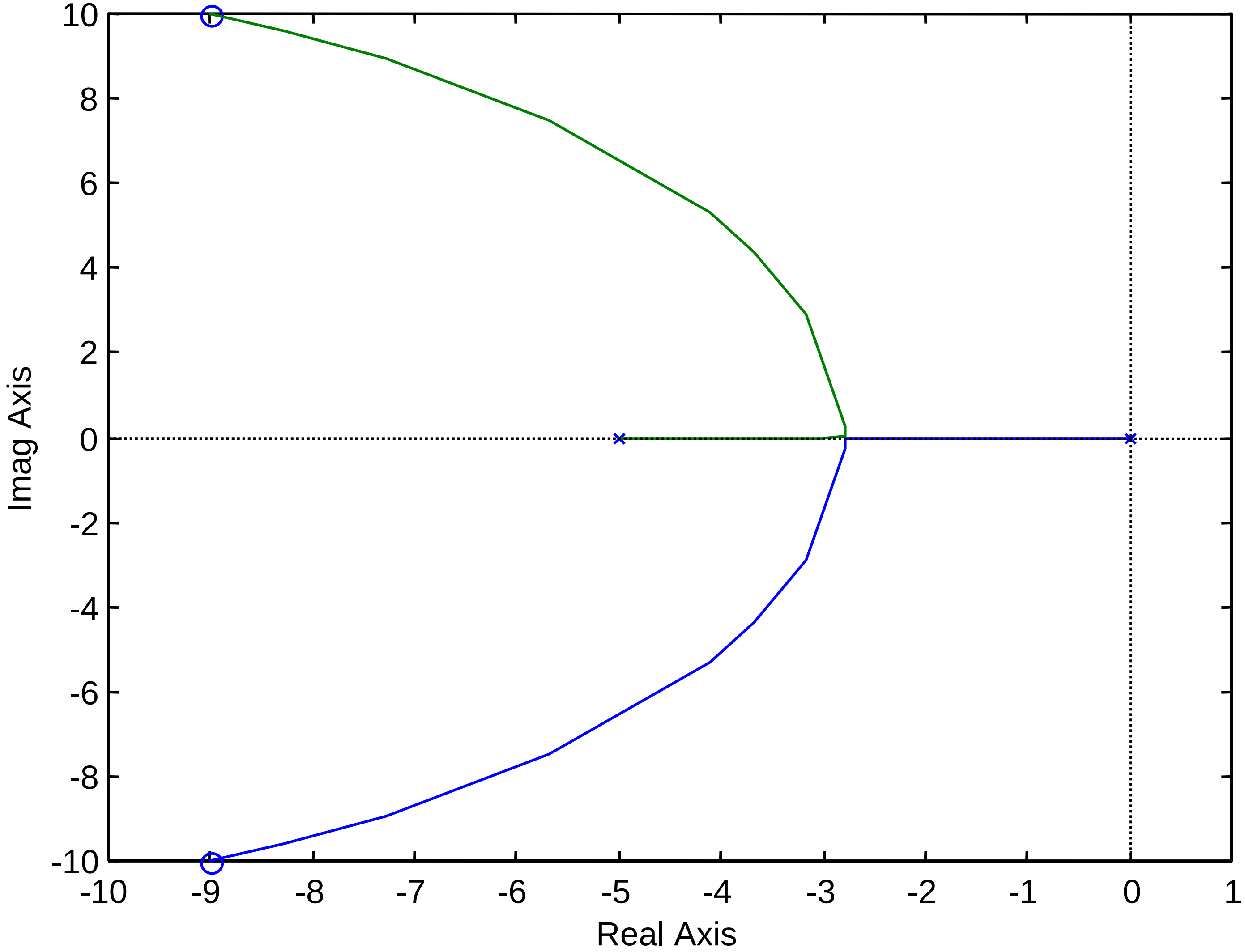
1) $G(s)H(s) = \dfrac{K}{s(s+a)}$ 取a=1 根轨迹如图所示



2) $G(s)H(s) = K\dfrac{(s+b)}{s(s+a)}$ 取a=1, b=5 根轨迹如图所示



3) $G(s)H(s)=K\dfrac{(s+z_1)(s+z_2)}{s(s+a)}$ 取a=5, z_1=9+10i, z_2=9-10i



③增加零点

例：

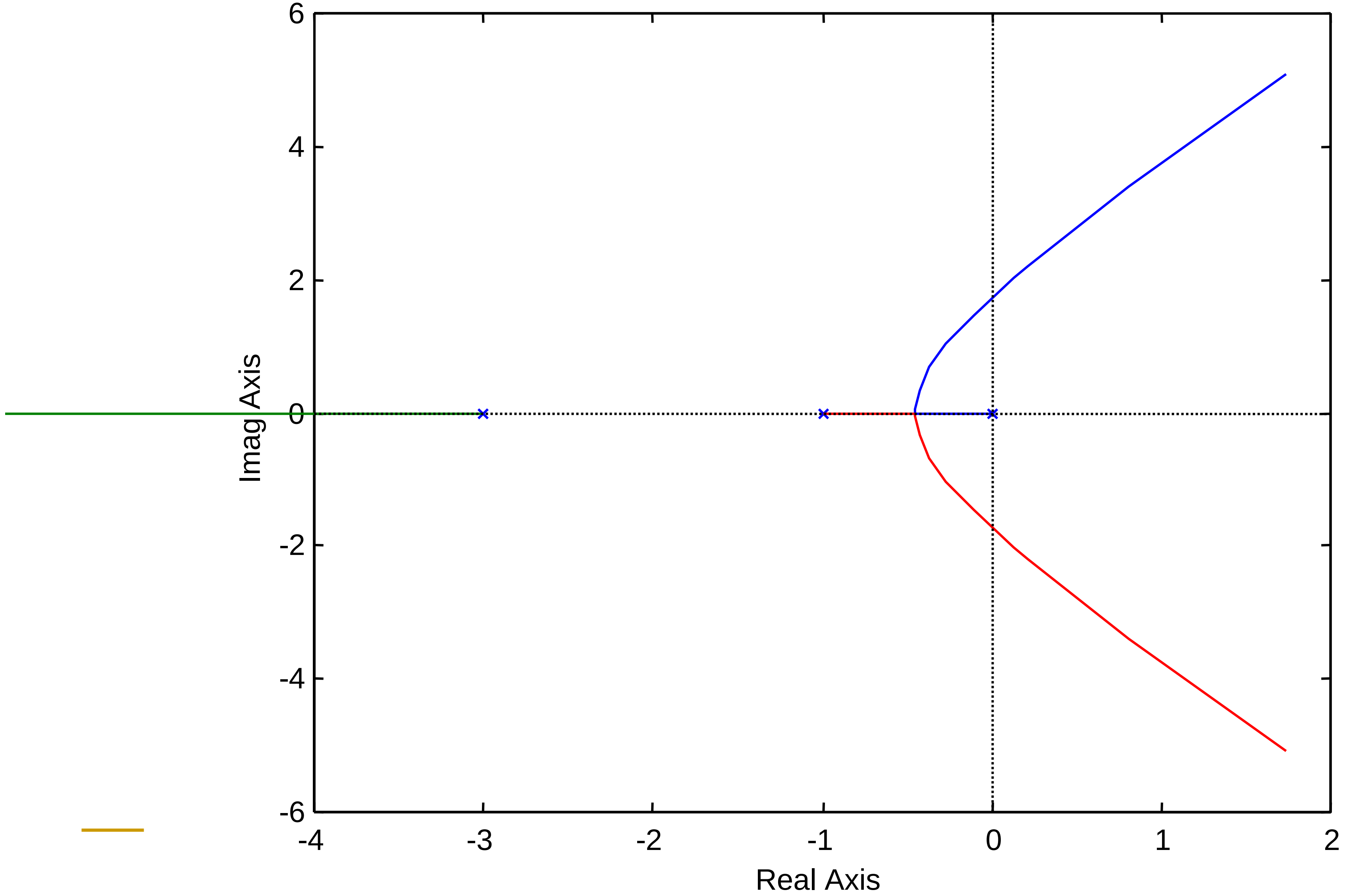
$$1)\ G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+a)(s+b)}$$

$$2)\ G(s)H(s)=\frac{K(s+c)}{s(s+a)(s+b)}$$

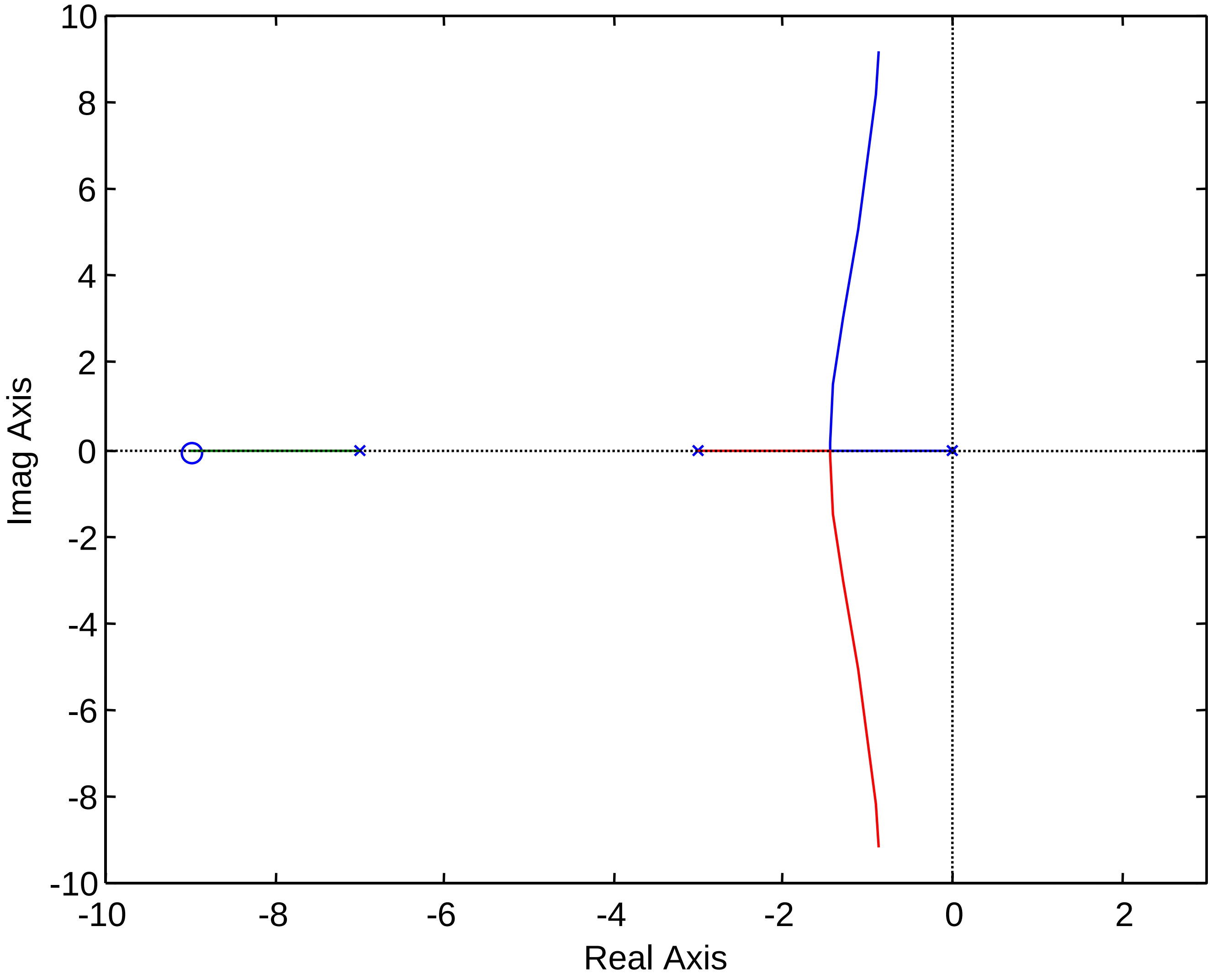
增加开环零点将使根轨迹向

左半平面移动,使系统稳定性变好。

1) 加一个实极点 $G(s)H(s)=\dfrac{K}{s(s+a)(s+b)}$ 取 a=1, b=3 根轨迹如图.



2）同时增加零极点 $G(s)H(s)=K\dfrac{(s+c)}{s(s+a)(s+b)}$ 取 a=3,b=7,c=9



2. 移动开环零极点时

一般结论：根轨迹可能显著变化。

例：

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+b)}{s^2(s+a)}$$

$1)\ a=10,\ b=1$

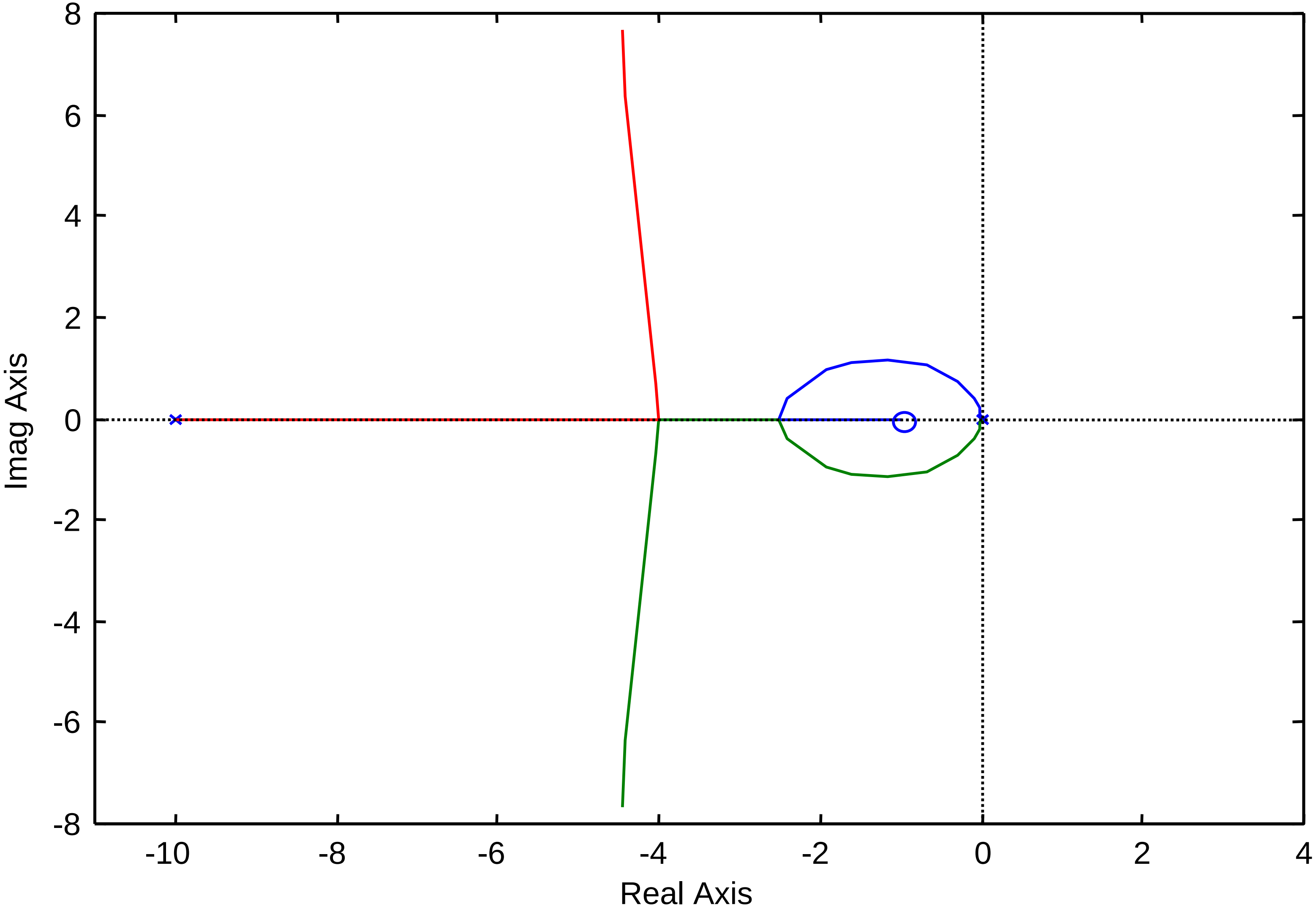
$2)\ a=9$

$3)\ a=8$

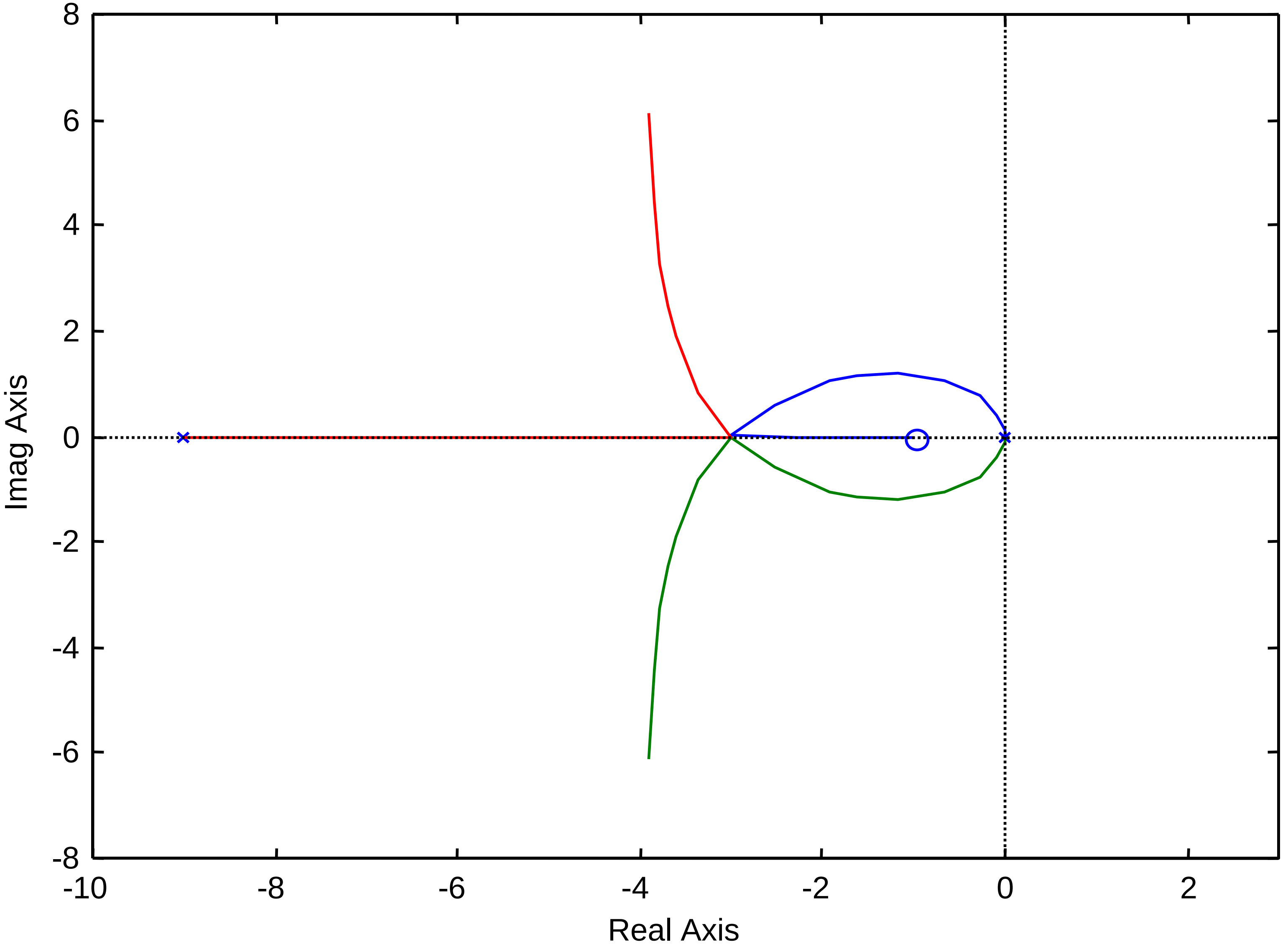
$4)\ a=3$

$5)\ a=1$

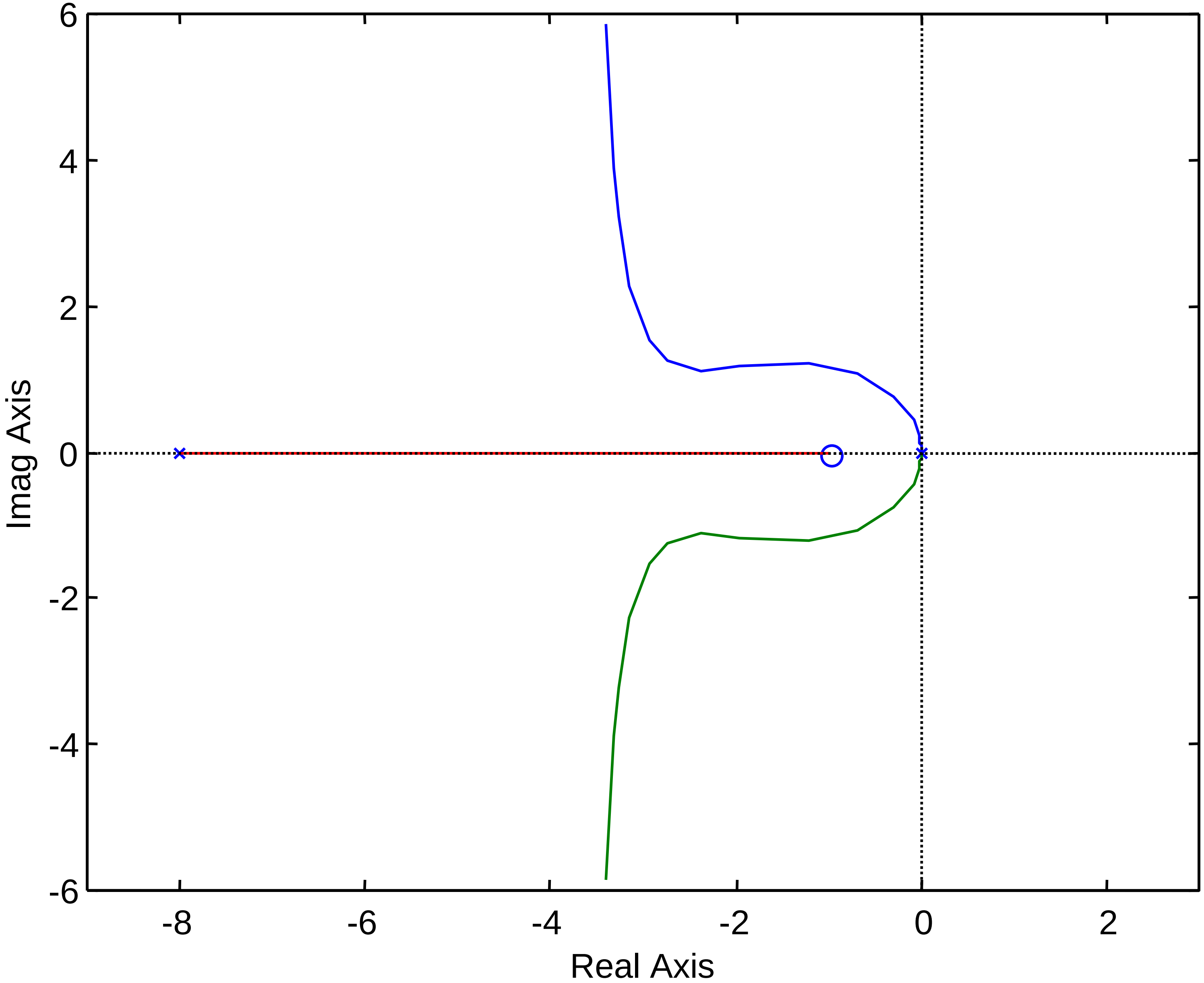
a=10



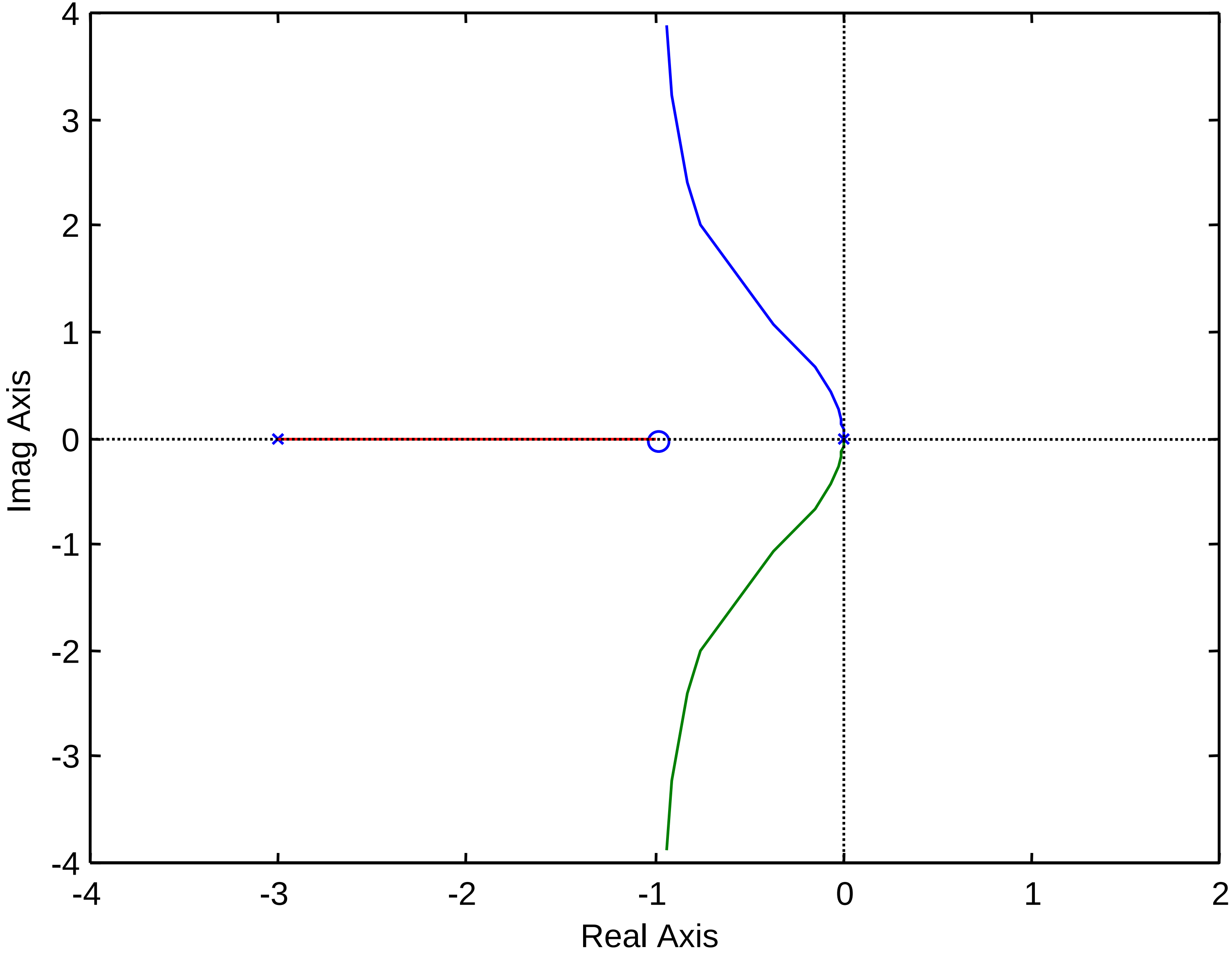
a=9



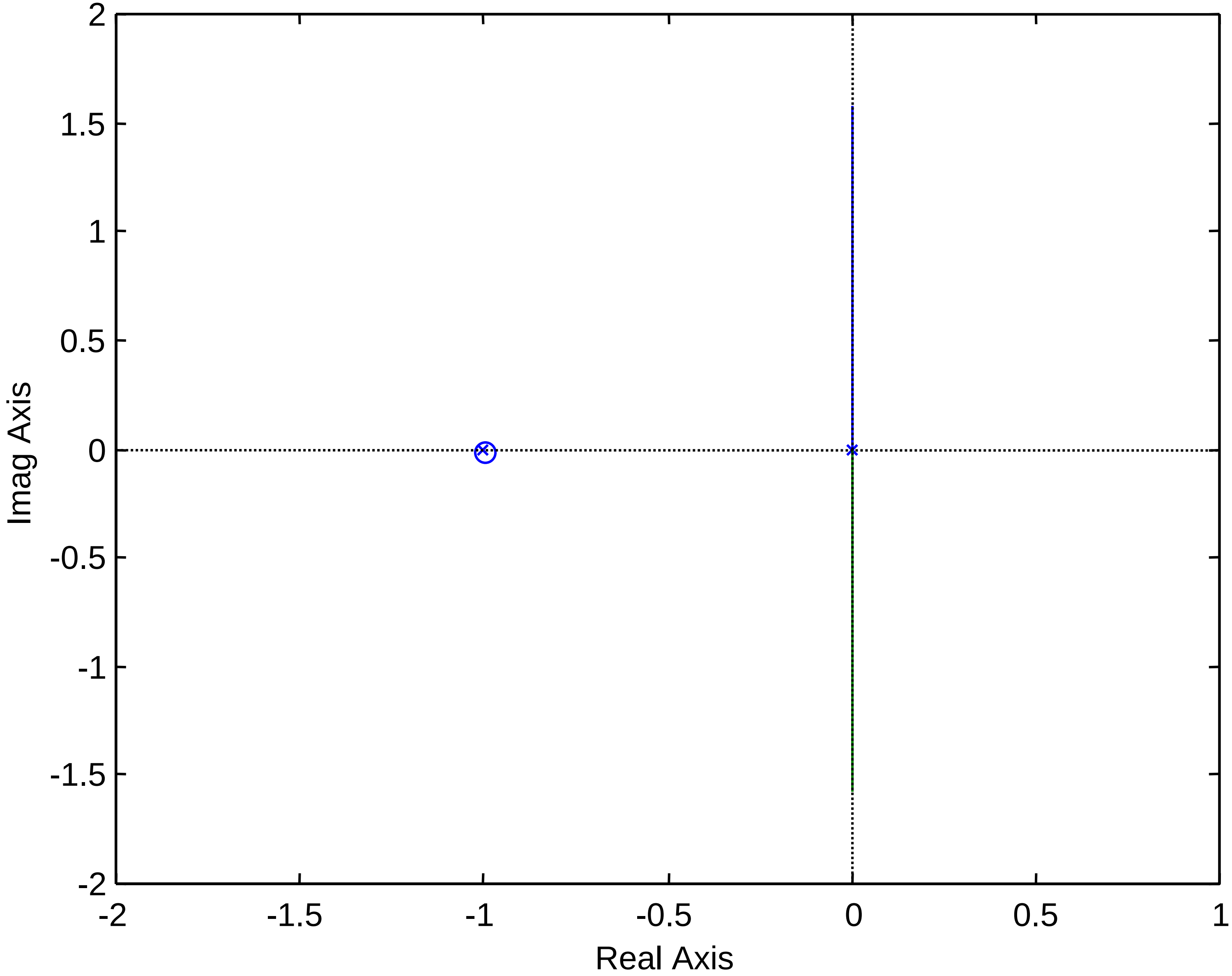
a=8



a=3



a=1



第五节 参变量根轨迹族

实际中有同时要研究几个参变量的情况。

这时可用参变量根轨迹族的方法。

绘制根轨迹族的原理和方法为嵌入法。

以二个参数根轨迹族为例：

设闭环特征方程：

K_1，K_2为可变参数，A(s)与参数无关。

$$A(s)+K_1B_1(s)+K_2B_2(s)=0$$

例: $G(s)H(s)=\dfrac{K_1(1+Ts)}{s(s+1)(s+2)}$

K_1和T为可变参数，试绘根轨迹族。

解：闭环方程: $s(s+1)(s+2)+K_1(Ts+1)=0$

先令T=0 则有 $G_1(s)H_1(s)=\dfrac{K_1}{s(s+a)(s+b)}$

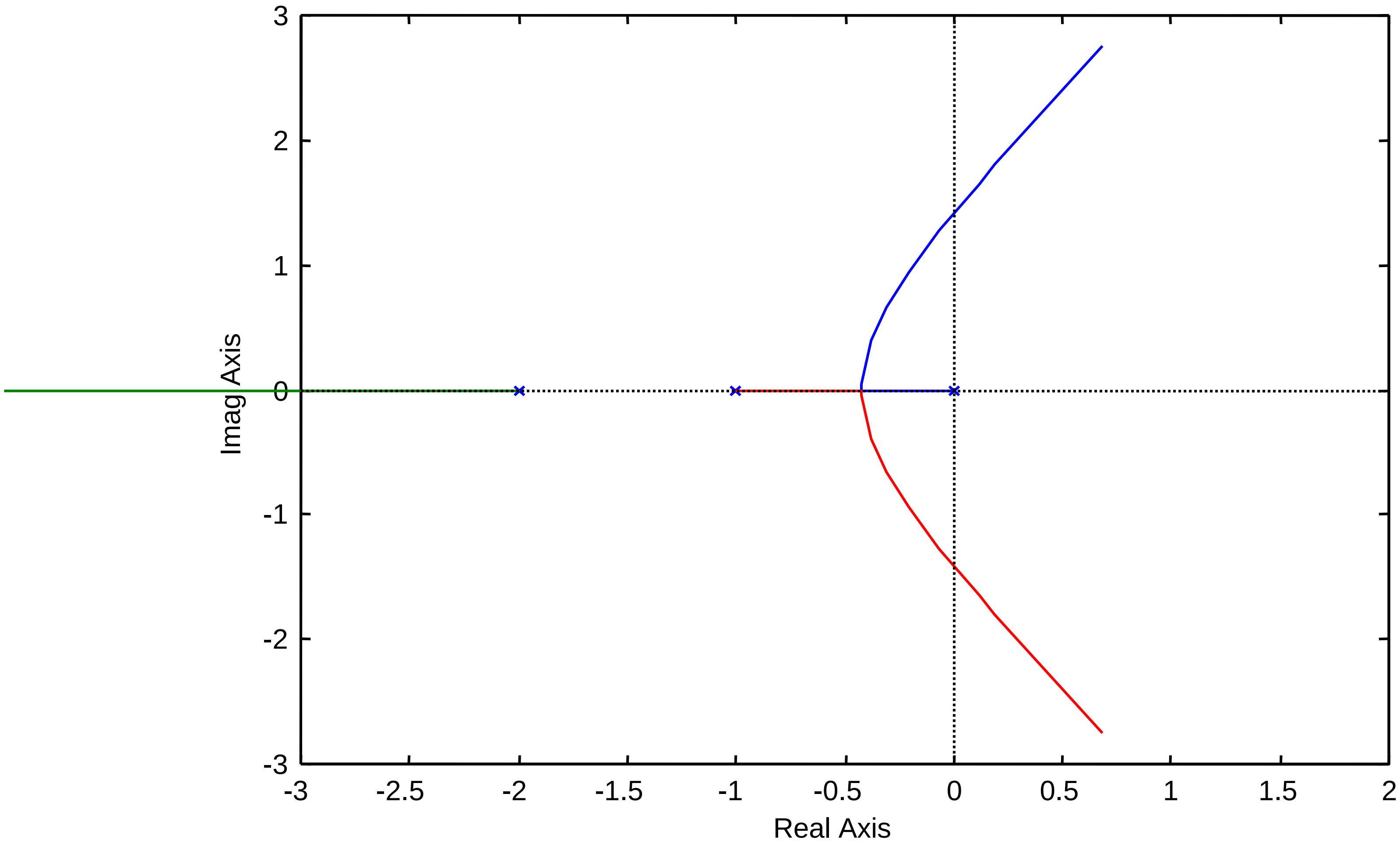
可画根轨迹；

再令T≠0 则有

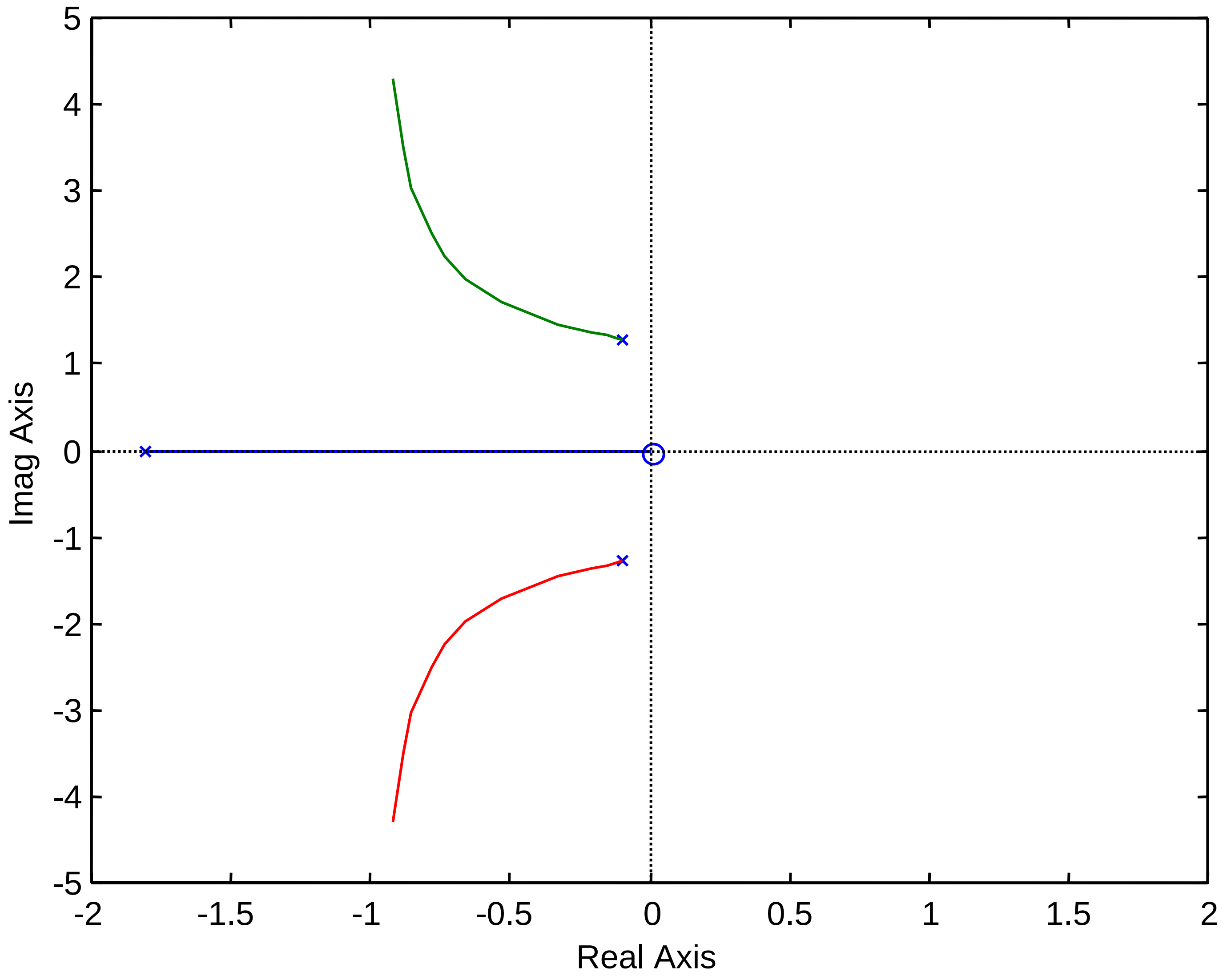
$$G_1(s)H_1(s)=\frac{K_1Ts}{s(s+1)(s+2)+K_1}$$

对于不同的K_1可画出$0<T<\infty$的根轨迹。

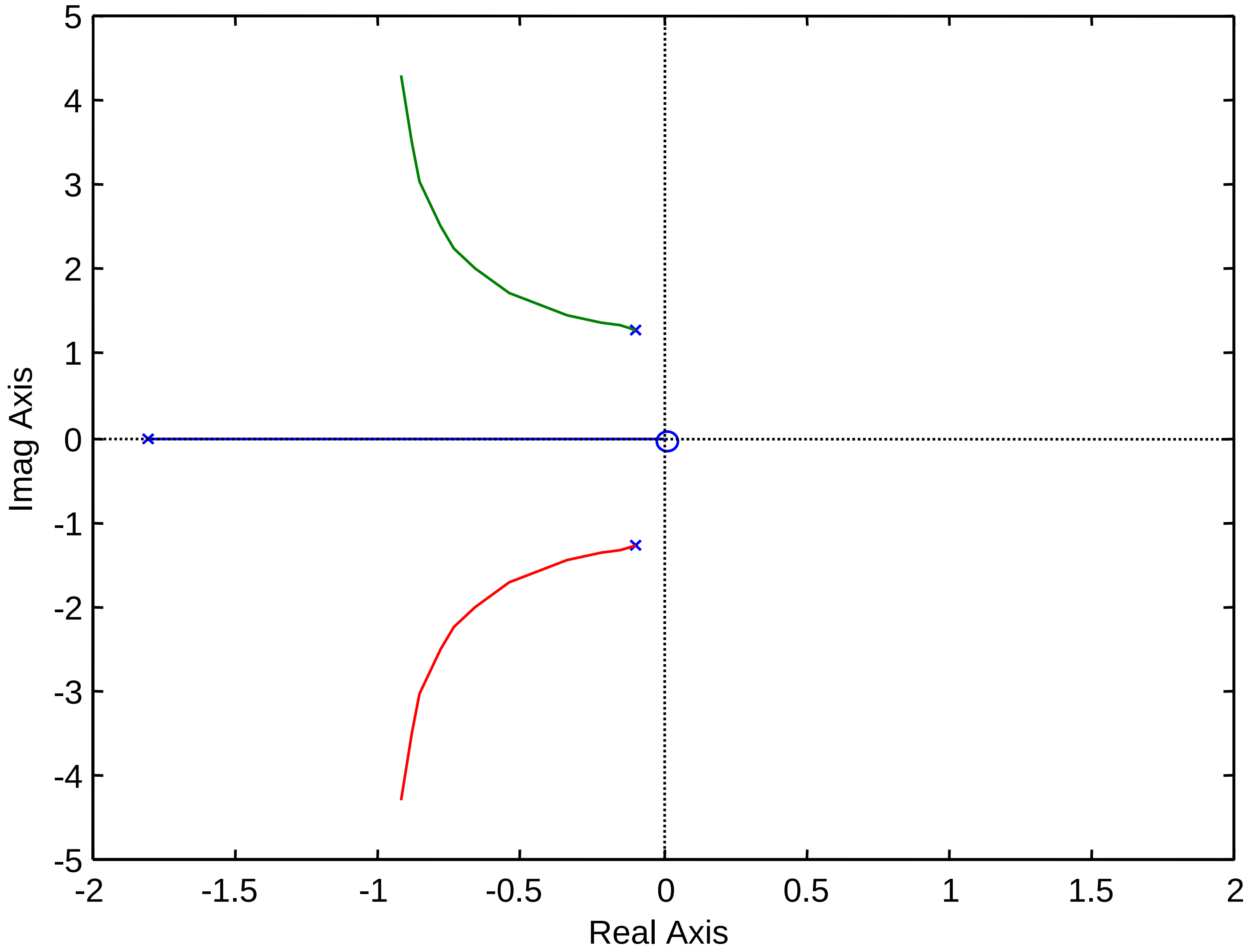
T=0, $G_1(s)H_1(s)=\dfrac{K_1}{s(s+1)(s+2)}$ K从0到无穷大变化的根轨迹



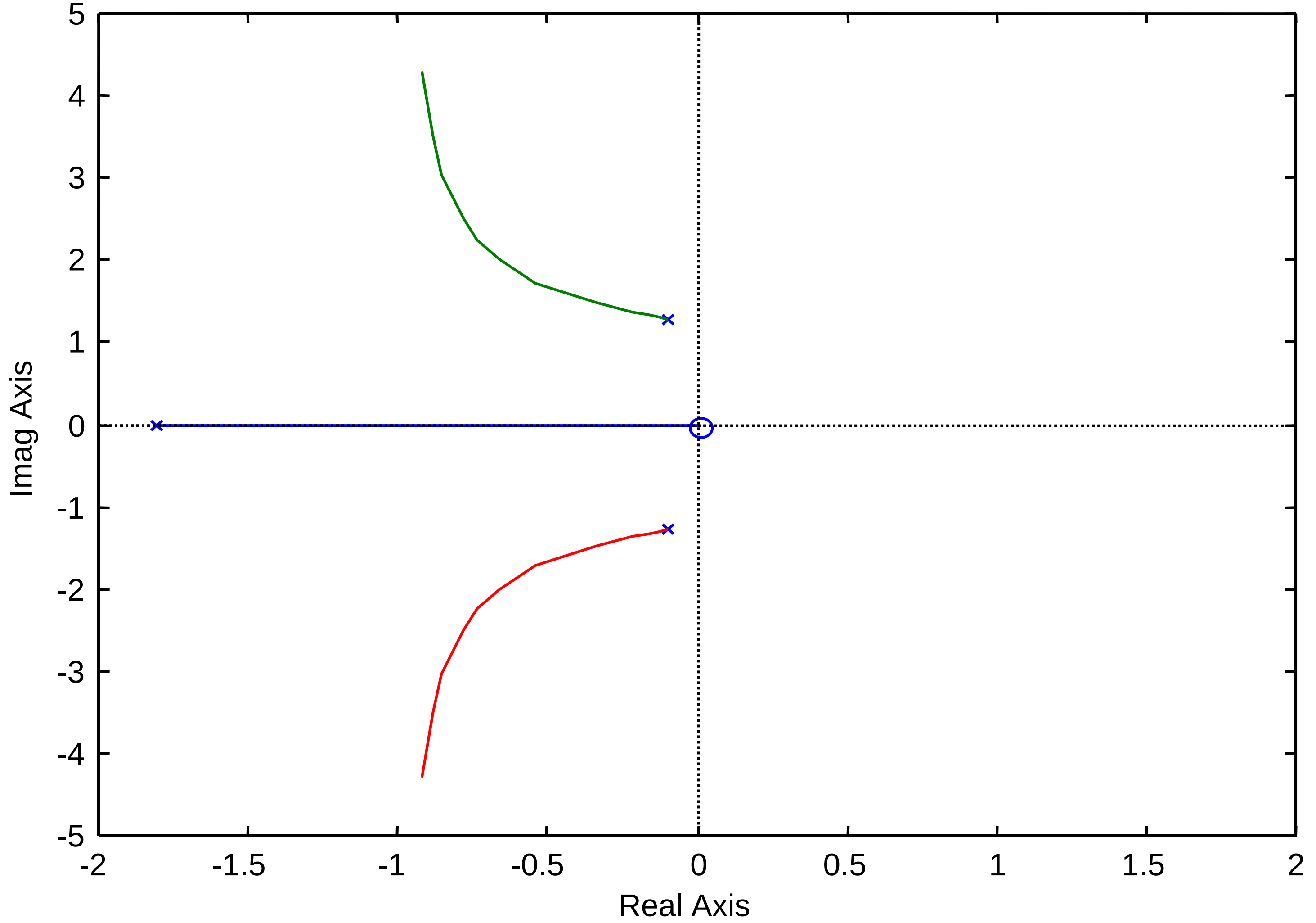
当K_1=3,T变化时的根轨迹



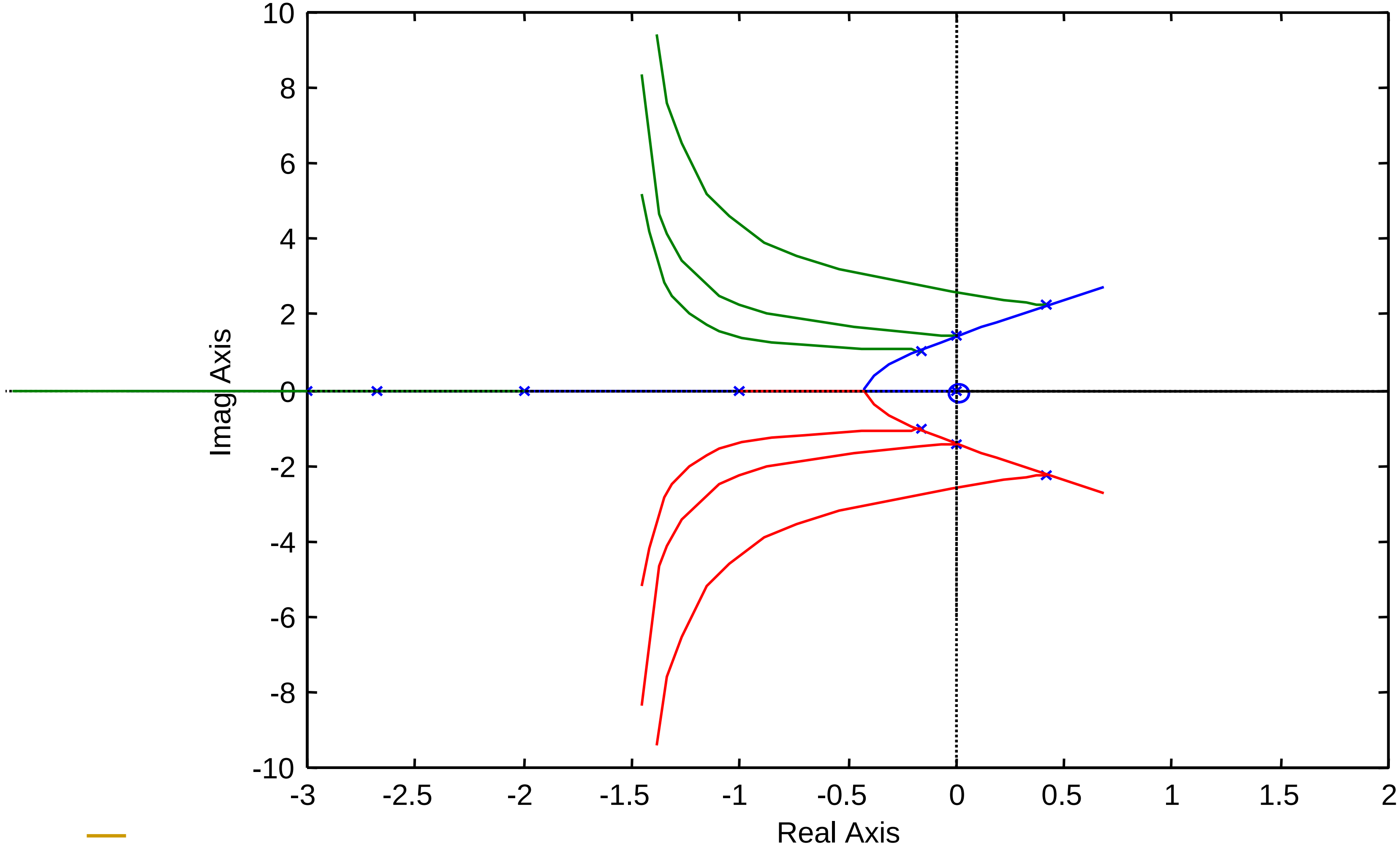
当K_1=6, T变化时的根轨迹



当K_1=20,T变化时的根轨迹



当 K_1=3,6,20　T变化时的根轨迹



小 结

本章详细介绍了根轨迹的基本概念、根轨迹的绘制方法以及根轨迹法在控制系统性能分析中的应用。根轨迹法是一种图解方法，可以避免繁重的计算工作，工程上使用比较方便。根轨迹法特别适用于分析当某一个参数变化时，系统性能的变化趋势。

根轨迹是系统某个参量从$0 \to \infty$变化时闭环特征根相应在s平面上移动描绘出的轨迹。

根轨迹法的基本思路是：在已知系统开环零、极点分布的情况下，依据绘制根轨迹的基本法则绘出系统的根轨迹；分析系统性能随参数的变化趋势；在根轨迹上确定出满足系统要求的闭环极点位置，补充闭环零点；再利用闭环主导极点的概念，对系统控制性能进行定性分析和定量估算。

绘制根轨迹是用轨迹法分析系统的基础。牢固掌握并熟练应用绘制根轨迹的基本法则，就可以快速绘出根轨迹的大致形状。

在控制系统中适当增加一些开环零、极点，可以改变根轨迹的形状，从而达到改善系统性能的目的。一般情况下，增加开环零点可使根轨迹左移，有利于改善系统的相对稳定性和动态性能；相反地，单纯加入开环极点，则根轨迹右移，不利于系统的相对稳定性及动态性能。